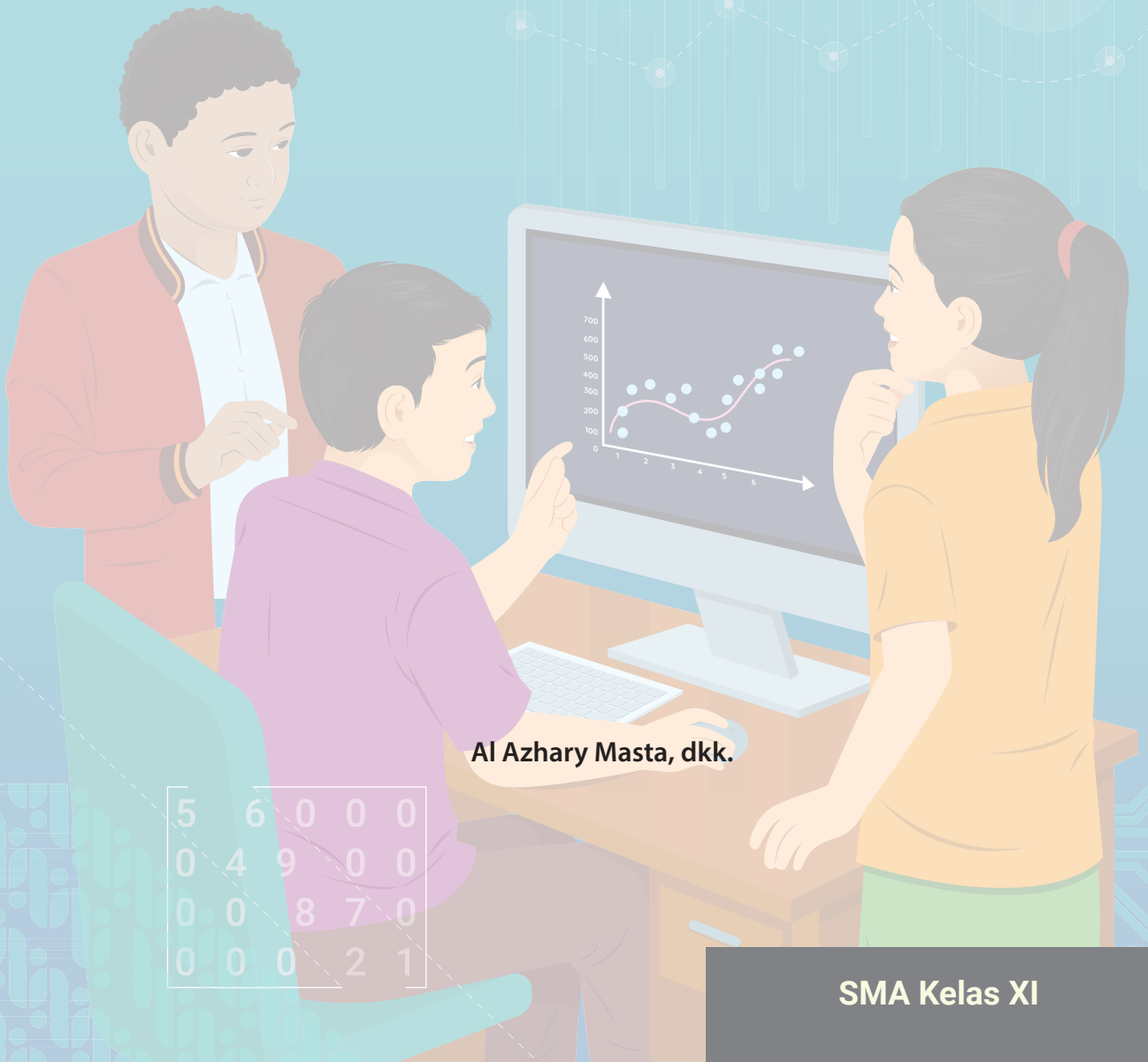
KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Matematika
Tingkat Lanjut

Al Azhary Masta, dkk.

SMA Kelas XI

Disclaimer: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini digunakan secara terbatas pada Sekolah Penggerak. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI

Penulis
Al Azhary Masta
Yosep Dwi Kristanto
Elyda Yulfiana
Muhammad Taqiyuddin

Penelaah
Sunardi
Kiki Aryanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras
Supriyatno
E. Oos M. Anwas
Arifah Dinda Lestari

Ilustrator
Yol Yulianto

Penyunting
Seni

Penata Letak (Desainer)
Dono Merdiko

Penerbit
Pusat Perbukuan
Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Komplek Kemendikbudristek Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
https://buku.kemdikbud.go.id

Cetakan pertama, 2021
ISBN 978-602-244-769-6 (Jilid Lengkap)
ISBN 978-602-244-770-2 (Jilid 1)

Isi buku ini menggunakan huruf Linux Libertine 12/18 pt, Philipp H. Poll.
xvi, 336 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi sesuai tugas dan fungsinya mengembangkan kurikulum yang mengusung semangat merdeka belajar mulai dari satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan pendidikan dalam mengembangkan potensi yang dimiliki oleh peserta didik. Untuk mendukung pelaksanaan kurikulum tersebut, sesuai Undang-Undang Nomor 3 tahun 2017 tentang Sistem Perbukuan, pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan memiliki tugas untuk menyiapkan Buku Teks Utama.

Buku teks ini merupakan salah satu sumber belajar utama untuk digunakan pada satuan pendidikan. Adapun acuan penyusunan buku adalah Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Penggunaan buku teks ini dilakukan secara bertahap pada Sekolah Penggerak, sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 162/M/2021 tentang Program Sekolah Penggerak.

Sebagai dokumen hidup, buku ini tentunya dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan. Oleh karena itu, saran-saran dan masukan dari para guru, peserta didik, orang tua, dan masyarakat sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan buku teks ini. Pada kesempatan ini, Pusat Perbukuan mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini mulai dari penulis, penelaah, penyunting, ilustrator,

desainer, dan pihak terkait lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Oktober 2021

Plt. Kepala Pusat,

Supriyatno

NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Buku siswa ini digunakan untuk pegangan siswa SMA Kelas XI yang disusun berdasarkan Kurikulum Sekolah Penggerak. Buku siswa ini disusun dengan mengembangkan kompetensi abad 21, nilai-nilai Pancasila dan menjawab tantangan era revolusi industri 4.0. Setiap bab dalam buku ini diupayakan untuk mengembangkan kompetensi siswa yang terkait dengan berpikir tingkat tinggi, berpikir kritis dan pemecahan masalah, kreatif dan inovatif, komunikatif, dan kolaboratif, memuat literasi informasi, media, dan teknologi yang diperlukan di era revolosi industri 4.0. Siswa perlu terlibat aktif untuk mencari tahu dan mengeksplorasi matematika.

Setiap bab dalam buku ini berisi fitur-fitur yang tidak hanya dapat digunakan siswa untuk mengembangkan kecakapan matematika, tetapi juga untuk mengembangkan kompetensi-kompetensi yang lebih luas. Penyajian materi dalam buku ini disusun agar siswa dapat mengeksplorasi matematika dan menemukan nilai-nilai yang bermakna dalam kehidupan sehari-hari.

Buku ini terbagi menjadi lima bab. Bab pertama adalah Bilangan Kompleks. Bab kedua adalah Polinomial. Bab ketiga dan keempat adalah Matriks dan Transformasi Geometri. Bab kelima adalah Fungsi dan Pemodelan. Melalui pembelajaran dalam setiap bab tersebut, siswa diharapkan dapat menyelesaikan Capaian Pembelajaran yang telah ditentukan.

Jakarta, Oktober 2021

Tim Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Petunjuk Penggunaan Buku

Peta konsep tersusun atas diagram yang menunjukkan koneksi antarkonsep dalam bab tertentu. Bagian ini dapat kalian gunakan untuk melihat gambaran umum keterkaitan topik-topik matematika yang akan dipelajari di dalam bab tersebut. Bagian kata kunci terdiri dari istilah-istilah penting yang akan disebutkan dalam bab tersebut.

Apa menariknya materi dalam bab yang akan kalian pelajari? Kalian dapat menemukannya di bagian pengantar bab. Bagian ini berisi cerita atau fakta menarik tentang materi di dalam bab tersebut.

Untuk belajar matematika, kalian tidak hanya sekadar membacanya tetapi juga perlu melakukannya. Bagian eksplorasi ini memfasilitasi untuk melakukan dan menjelajah matematika secara terbimbing.

Bagian-bagian penting dalam materi, seperti definisi dan sifat, disajikan dalam bentuk kolom-kolom materi. Hal ini ditujukan agar kalian dengan mudah dapat menemukan dan membacanya kembali.

Apakah kalian ingin mengetahui bagaimana penggunaan materi yang kalian pelajari untuk menyelesaikan soal? Kalian dapat melihatnya di bagian Contoh Soal. Setelah melihat contoh tersebut, apakah kalian ingin berlatih mengerjakan soal yang serupa? Kalian dapat mengerjakan soal-soal dalam bagian Mari, Mencoba.

Adanya kolom Mari, Berpikir Kritis merupakan suatu upaya untuk membentuk kalian menjadi pelajar Pancasila yang siap hidup di abad 21. Kolom ini mengajak kalian membiasakan diri untuk tidak hanya menerima informasi yang diperoleh, tetapi juga untuk menganalisis, merefleksikan, dan membuat keputusan terhadap informasi tersebut. Bagi guru, kolom ini dapat digunakan dalam pembelajaran di kelas atau sebagai tugas yang dikerjakan di luar kelas.

Kolom Mari, Berpikir Kreatif sejalan dengan upaya untuk menjadikan kalian pelajar Pancasila yang hidup di abad 21. Kolom ini berisi permasalahan yang mengajak kalian untuk mengkreasi gagasan yang orisinal, bermakna, dan berdampak bagi pembelajarannya sendiri ataupun orang lain.

Kolom Mari, Berkolaborasi bertujuan untuk membudayakan kolaboratif. Kolom ini dimaksudkan agar kalian siap menghadapi abad 21 yang sangat terkoneksi satu sama lain. Permasalahan dalam kolom ini perlu kalian kerjakan dalam kelompok atau berpasangan.

Kolom Mari, Mengomunikasikan bertujuan untuk melatih komunikasi matematis kalian. Di dalam kolom ini, kalian akan menjumpai permasalahan yang meminta untuk menganalisis dan mengevaluasi pemikiran atau strategi orang lain. Selain itu, di kolom tersebut kalian juga akan diajak untuk mengomunikasikan pemikiran dan strategi secara koheren kepada orang lain.

Kolom Matematika dan Sains berisi cerita atau fakta yang menunjukkan dekatnya Matematika dengan Sains. Berdasarkan kolom tersebut, kalian diharapkan menjadi lebih tertarik mempelajari matematika dan mendapatkan informasi-informasi di luar matematika yang berguna.

Matematika ada di mana-mana, termasuk di dalam budaya. Kurang lebih seperti itu pesan yang ingin disampaikan oleh fitur ini. Di dalam fitur ini, kalian akan diperlihatkan bagaimana matematika muncul dalam budaya-budaya tertentu. Melalui fitur ini, diharapkan akan lebih mencintai dan menghargai matematika.

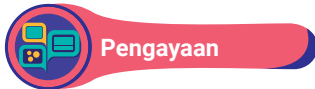
Latihan terdiri dari dua bagian, yaitu Pemahaman Konsep dan Penerapan Konsep. Bagian Pemahaman Konsep berisi soal-soal yang bertujuan untuk memeriksa konsep-konsep penting yang diajarkan. Bagian Penerapan Konsep berisi soal-soal dan masalah-masalah yang meminta kalian menerapkan konsep-konsep matematika yang telah dipelajari dan mengintegrasikannya untuk menyelesaikan masalah.

Bagian ini berisi rangkuman dan ringkasan dari materi penting yang disajikan dalam suatu bab. Rangkuman ini dapat kalian gunakan untuk mengingat kembali apa saja yang telah dipelajarinya di dalam bab tersebut.

Uji Kompetensi terdiri dari soal-soal yang dibagi menjadi tiga kategori, yaitu Uji Pemahaman, Penerapan, dan Penalaran. Soal-soal yang masuk ke dalam kategori Uji Pemahaman merupakan soal-soal yang sejalan dengan

tujuan pembelajaran yang ditetapkan. Soal-soal dalam kategori Penerapan merupakan soal-soal penerapan matematika dalam kehidupan sehari-hari. Kategori Penalaran berisi soal-soal yang mengajak kalian bernalar dan membuktikan pernyataan matematis.

Fitur Proyek ini berisi masalah atau tugas. Di dalam proyek tersebut, kalian diminta mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilan untuk menyelesaikan masalah atau tugas.

Bagian Refleksi terdiri dari dua bagian. Di bagian pertama, kalian diminta untuk menceritakan manfaat yang kalian terima setelah mempelajari materi dalam bab tertentu. Di bagian kedua, kalian diajak untuk mengevaluasi diri terhadap pengalaman belajar yang telah kalian alami.

Semua materi tidak mungkin disediakan di dalam sebuah buku. Oleh karena itu, bagian pengayaan ini memberikan informasi bagi siswa jika mereka ingin memperdalam dan memperkaya pengetahuan dan keterampilan yang relevan.

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2021**
Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-770-2

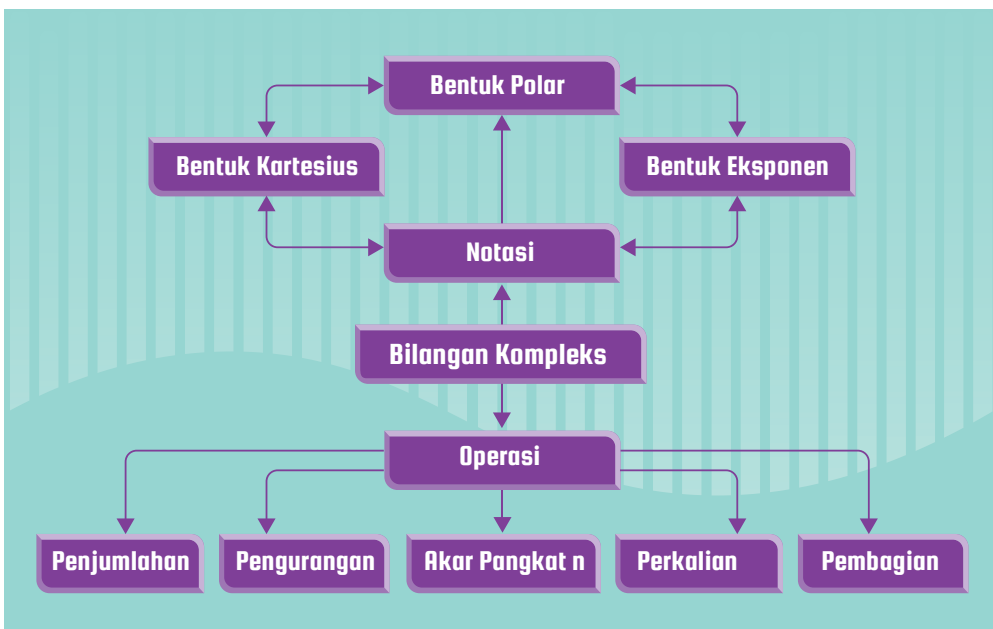
Bab 1

Bilangan Kompleks

Pernahkah kalian melihat suatu persoalan yang tidak dapat diselesaikan dalam himpunan bilangan real? Apa yang dilakukan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan tersebut?

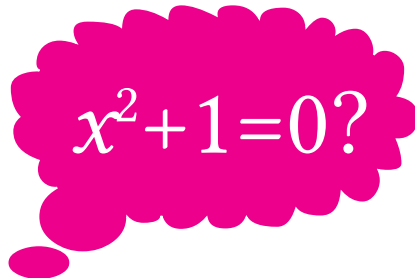
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut.

- Menjelaskan pengertian dan bentuk bilangan kompleks
- Melakukan operasi-operasi pada bilangan kompleks serta menggunakan sifat-sifatnya untuk penyelesaian masalah
- Menjelaskan bentuk konjugat dan modulus bilangan kompleks, serta menggunakan sifat-sifatnya untuk penyelesaian masalah

Kata Kunci

Bilangan Kompleks, Notasi Bilangan Kompleks, Bidang Kompleks, Operasi Bilangan Kompleks, Bentuk Kartesius, Bentuk Polar, Bentuk Eksponen, Akar Pangkat *n*.

Solusi Persamaan Kuadrat

Salah satu pertanyaan yang muncul saat kalian sedang mempelajari suatu persamaan aljabar ialah menentukan solusi dari persamaan tersebut. Pada saat menyelesaikan persamaan tersebut, sering ditemukan persamaan-persamaan yang tidak mudah diselesaikan. Bahkan ada persamaan-persamaan yang tidak ada solusinya pada himpunan bilangan real. Contohnya diberikan persamaan $x^2 + 1 = 0$ maka diperoleh $x^2 = -1$. Pada himpunan bilangan real, diketahui setiap bilangan kuadrat tidak mungkin bernilai negatif. Oleh karena itu, persamaan tersebut tidak dapat diselesaikan dalam himpunan bilangan real.

Di Bab 1 ini, kita akan mempelajari bilangan kompleks. Dengan memanfaatkan konsep bilangan kompleks, kita dapat mempelajari bagaimana peranan bilangan kompleks dalam memberikan solusi yang tidak dapat diselesaikan dalam himpunan bilangan real. Mari, kita belajar bilangan kompleks dengan penuh semangat!

A. Bilangan Kompleks

Ketika di sekolah menengah pertama, kalian telah mempelajari persamaan kuadrat. Salah satu hal yang sering ditanyakan ketika membahas tentang persamaan kuadrat adalah solusi dari persamaan kuadrat tersebut. Akitvitas eksplorasi berikut, akan membantu kalian memahami pentingnya mempelajari bilangan kompleks.

Solusi Persamaan Aljabar

Diberikan sebuah persamaan kuadrat $x^2 - 1 = 0$ tentukan x yang memenuhi persamaaan tersebut. Untuk mendapatkan nilai x perhatikan langkah-langkah berikut.

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	Bentuk faktorisasi $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$0 = (x-1)(x+1)$	
$(x-1) = 0$ atau $(x+1) = 0$	Sifat perkalian bilangan real, $a \times b = 0$
$x = 1$ atau $x = -1$	jika dan hanya jika $a = 0$ atau $b = 0$

Perhatikan persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$. Dapatkah kalian menentukan x yang memenuhi persamaaan tersebut? Apa yang dapat kalian peroleh dari hasil tersebut?

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita tahu bahwa tidak ada bilangan real x yang memenuhi persaman kuadrat $x^2+1=0$. Hal ini disebabkan x yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut adalah $x = \sqrt{-1}$ atau $x = -\sqrt{-1}$. Sedangkan pada himpunan bilangan real, $\sqrt{x}$ bernilai real untuk x adalah bilangan real nonnegatif.

Untuk mencari solusi dari persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$, atau bentuk-bentuk persoalan lainnya yang tidak dapat diselesaikan pada himpunan bilangan real, diperlukan himpunan bilangan yang lebih luas. Pada bab ini kalian akan mempelajari tentang bilangan kompleks sebagai perluasan dari bilangan real.

1. Pengertian Bilangan Kompleks

Sebelum mengenal bentuk dari bilangan kompleks, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut.

Mengenal Bentuk Bukan Bilangan Real

Di jenjang sekolah menengah pertama kalian telah belajar tentang bentuk-bentuk bilangan real. Pada aktivitas ini, kalian akan menggunakan pengetahuan mengenai bentuk-bentuk bilangan real untuk mengindentifikasi bentuk-bentuk mana saja yang merupakan bilangan real dan bukan bilangan real.

1. Kelompokkan bentuk-bentuk bilangan berikut menjadi dua bagian.

   $2\sqrt{2}$, -8, $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, $3+\sqrt{-5}$, 2, $\sqrt{-1}$ dan $2-\sqrt{5}$

   Setelah selesai mengelompokkannya, jelaskan alasan kalian dalam mengelompokkan bentuk-bentuk tersebut!

2. Salah satu cara untuk mengelompokkan bentuk-bentuk bilangan pada bagian 1 adalah sebagai berikut.

   Kelompok 1: $2\sqrt{2}$, -8, 2, dan $2-\sqrt{5}$

   Kelompok 2: $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, $3+\sqrt{-5}$, dan $\sqrt{-1}$

   Menurut kalian, apa dasar pengelompokkan tersebut?

3. Pada bagian 2, bentuk-bentuk bilangan pada kelompok 1 disebut dengan kelompok bilangan real, sedangkan bentuk-bentuk pada kelompok 2 bukanlah bilangan real. Apa yang dapat kalian simpulkan?

Pada eksplorasi tersebut, kalian telah mengenal beberapa bentuk yang bukan bilangan real. Bentuk-bentuk bukan bilangan real di atas menjadi dasar untuk memahami bilangan kompleks. Secara definisi bilangan kompleks adalah sebagai berikut.

Definisi 1.1

Pengertian Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks ialah suatu bilangan yang terdiri atas bagian real dan bagian tidak real, bagian tidak real sering dinyatakan sebagai bagian imajiner.

Di dalam memahami Definisi 1.1, diberikan notasi Euler untuk menyatakan bentuk yang bukan bilangan real yakni i dimana $i^2 = -1$, sehingga bentuk $\sqrt{-1}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $i = \sqrt{-1}$. Lebih jauh, untuk memahami pengertian dari bilangan kompleks dapat dilihat dalam contoh berikut.

Contoh 1.1

Mengidentifikasi Bilangan Kompleks

Tentukan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks berikut

a). $2+i$

b). $2-\sqrt{-4}$

c). $\sqrt{2}$

d). $\sqrt{(-2)^3}$

Alternatif Penyelesaian

a). Bentuk $2+i = 2+1i$ memiliki bagian real dan bagian imajiner, yakni 2 adalah bagian real dan 1 bagian imajiner

b). Bentuk $2-\sqrt{-4}$ dapat dinyatakan sebagai $2-\sqrt{-4} = 2-2i$, sehingga 2 adalah bagian real dan −2 bagian imajiner

c). Bentuk bilangan real $\sqrt{2}$ juga dapat dipandang sebagai bilangan kompleks karena bentuk $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan $\sqrt{2}+0i$ sehingga $\sqrt{2}$ adalah bagian real dan 0 bagian imajiner

d). Bentuk $\sqrt{(-2)^3} = \sqrt{(-2)(-2)(-2)} = 2\sqrt{-2} = 0+2\sqrt{2}i$ adalah bilangan kompleks dikarenakan memuat bagian real yakni 0 dan bagian imajiner yakni $2\sqrt{2}$.

Tentukan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks berikut!

a). $2+\sqrt[4]{(-2)^2}$

b). $2+i^2$

c). $1+\sqrt{-9}$

d). $1+2i$

Secara umum notasi bilangan kompleks dinyatakan dalam bentuk $z=a+ib$ untuk suatu a,b bilangan real. Contohnya bilangan kompleks $2+i$ dan $2-\sqrt{-4}$ dapat dituliskan sebagai $z=2+i$ dan $z=2-\sqrt{-4}=2-2i$. Sedangkan himpunan bilangan kompleks dinotasikan dengan $\mathbb{C}$.

Mari Mengomunikasikan

Kalian telah mengetahui pengertian dari bilangan kompleks. Berikan pendapatmu, apakah himpunan bilangan real bagian dari himpunan bilangan kompleks? Jika iya, jelaskan alasannya!

Setelah memahami pengertian bilangan kompleks kita dapat menyelesaikan persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$, yakni solusi dari persamaan kuadrat tersebut adalah $x=i$ atau $x=-i$. Untuk memahami bagaimana solusi persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan memanfaatkan bilangan kompleks. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.2

Persamaan Kuadrat

Tentukan solusi dari persamaan kuadrat $2x^2+x+2=0$.

Alternatif Penyelesaian

Dengan manfaatkan rumus kuadratik untuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, diperoleh solusi persamaan kuadrat $2x^2 + x + 2 = 0$ adalah

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{4} \text{ atau,}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-15}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{4} \text{ dan } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-15}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{15}i}{4}$$

Tentukan solusi dari persamaan kuadrat $x^2 + x + 2 = 0$.

2. Bentuk - Bentuk Bilangan Kompleks

Kalian telah mengetahui pengertian dari bilangan kompleks dan contoh bilangan kompleks, seperti *2+i*, *2-i*, dan lain-lainnya. Bentuk-bentuk tersebut dinamakan bentuk kartesius bilangan kompleks dan dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 1.2

Bentuk Kartesius Bilangan Kompleks

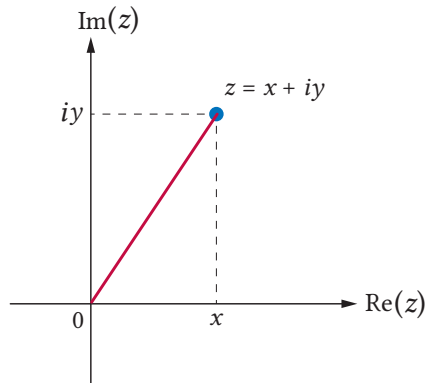
Bilangan kompleks z yang dinyatakan dalam bentuk

$$z = x + iy$$

dengan x, y bilangan real disebut sebagai **bentuk kartesius**.

Berdasarkan Definisi 1.2, bilangan x disebut bagian real dari z yang dinotasikan dengan $\text{Re}(z)$ atau $\text{Re}(z) = x$ dan bilangan y disebut bagian imajiner dari z dinotasikan dengan $\text{Im}(z)$ atau $\text{Im}(z) = y$.

Selain itu, bentuk bilangan $z = x + iy$ dapat juga dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut $z = (x,y)$. Secara geometri, bilangan kompleks dapat direpresentasikan dalam sistem koordinat yang biasanya dinyatakan sebagai bidang kompleks. Bagian real dari bilangan kompleks dinyatakan pada

sumbu garis horizontal dan bagian imajiner bilangan kompleks dinyatakan pada garis vertikal, seperti pada gambar berikut ini.

Gambar 1.1 Bilangan Kompleks pada Bidang Kompleks.

Untuk memahami tentang representasi bilangan kompleks pada bidang kompleks, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.3

Bilangan Kompleks pada Bidang Kompleks

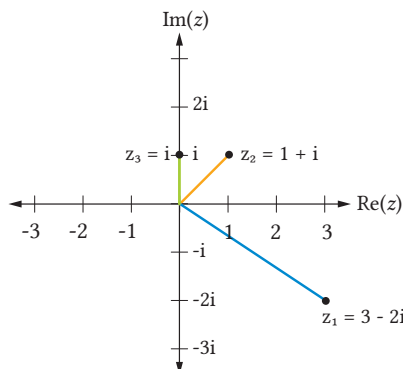
Gambarlah bilangan kompleks berikut pada bidang kompleks.

a). $z_1 = 3 - 2i$

b). $z_2 = 1 + i$

c). $z_3 = i$

Alternatif Penyelesaian

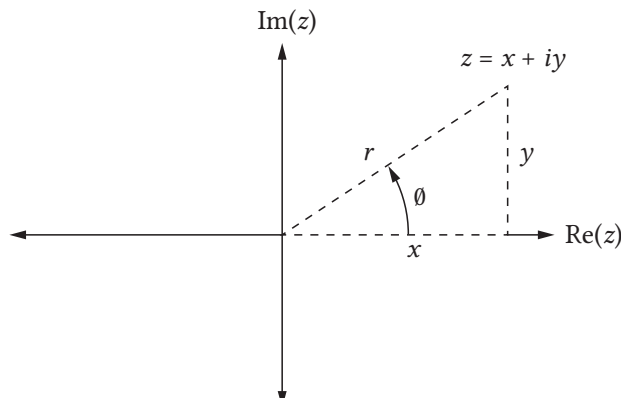
Dengan memanfaatkan pengetahuan tentang koordinat kartesius, maka diperoleh ilustrasi bilangan kompleks tersebut pada bidang kompleks berikut ini.

Gambar 1.2 Bilangan z_1, z_2, dan z_3 pada Bidang Kompleks

Gambarlah bilangan kompleks berikut pada bidang kompleks.

a). $z_1 = 3 + 2i$

b). $z_2 = -1 - i$

c). $z_3 = 2$

Perhatikan kembali ilustrasi Gambar 1.1, terdapat sudut yang terbentuk antara garis dari titik ke bilangan kompleks z dengan sumbu real. Dengan memanfaatkan aturan trigonometri maka kita dapat menyatakan bilangan kompleks $z = x + iy$ dalam bentuk lain, yakni dinamakan bentuk polar. Untuk menyatakan bilangan kompleks dalam bentuk polar, perhatikan ilustrasi gambar berikut.

Gambar 1.3 Representasi Bentuk Polar Bilangan Kompleks pada Bidang Kompleks

Perhatikan Gambar 1.3, dapat dilihat terdapat sudut antara sumbu $\mathrm{Re}(z)$ dan garis penghubung titik z dan titik *0*. Bentuk ini memberikan ide penggunaan aturan trigonometri untuk merepresentasikan bilangan kompleks. Berdasarkan sifat Trigonometri diperoleh $\cos\theta = \frac{x}{r}$ dan $\sin\theta = \frac{y}{r}$, akibatnya $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Akibatnya, diperoleh $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ disebut sebagai bentuk polar dan dapat dinyatakan juga sebagai $z = (r, \theta)$ atau $z = r\mathrm{cis}\theta$.

Definisi 1.3

Bentuk Polar Bilangan Kompleks

Misalkan x,y bilangan real maka bilangan kompleks $z=x+iy$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar yakni,

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$.

Untuk memahami bentuk polar dari bilangan kompleks dapat dilihat dalam contoh berikut.

Contoh 1.4

Bentuk Polar Bilangan Kompleks

Tentukan bentuk polar dari bilangan kompleks berikut.

a). $z = 1 + i$

b). $z = \sqrt{3} + i$

Alternatif Penyelesaian

a). Bilangan kompleks $z = 1 + i$ mempunyai $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ dan $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Salah satu nilai θ yang memenuhi adalah θ=45°. Jadi bentuk polar dari bilangan komplek $z = 1 + i$ adalah $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$.

b). Bilangan kompleks $z = \sqrt{3} + i$ mempunyai $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$ dan $\sin\theta = \frac{1}{2}$ dan $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dengan memanfaatkan sudut istimewa trigonometri maka diperoleh $\theta = 30^\circ$. Jadi bentuk polar dari bilangan kompleks $z = \sqrt{3} + i$ adalah $z = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$.

Mari Mencoba

Tentukan bentuk polar dari bilangan kompleks berikut.

a). $1 + \sqrt{3}i$

b). $-i$

Selain itu, terdapat suatu identitas yang menyatakan $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Dengan memanfaatkan identitas tersebut, maka bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ bisa dinyatakan dalam bentuk $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. Bentuk bilangan kompleks $z = re^{i\theta}$ disebut sebagai bentuk eksponen. Adapun definisi bentuk eksponen bilangan kompleks dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 1.4

Bentuk Eksponen Bilangan Kompleks

Misalkan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah bentuk polar bilangan kompleks maka z dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen yakni,

$$z = re^{i\theta}$$

dengan $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Untuk memahami bentuk eksponen dari bilangan kompleks dapat dilihat dalam contoh berikut.

Contoh 1.5

Bentuk Eksponen Bilangan Kompleks

Tentukan bentuk eksponen dari bilangan kompleks berikut.

a). $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

b). $z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$

Alternatif Penyelesaian

a). Bilangan kompleks $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen yakni $z = \sqrt{2}e^{i45^\circ}$

b). Bilangan kompleks $z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen yakni $z = \sqrt{2}e^{i315^\circ}$

Tentukan bentuk eksponen dari bilangan kompleks berikut.

a). $z = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

b). $z = \dfrac{(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}{2}$

Selanjutnya, dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ dikatakan sama jika setiap bagian realnya sama dan bagian imajinernya sama, atau $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Untuk memahami hal ini, dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 1.6

Kesamaan Dua Bilangan Kompleks

Tentukan apakah setiap bilangan kompleks berikut sama atau berbeda.

a). $z_1 = 3 - 2i$ dan $z_2 = 4 + 2i$

b). $z_1 = 1 + i$ dan $z_2 = 1 - i$

c). $z_1 = 1 + i$ dan $z_2 = i + 1$

Alternatif Penyelesaian

a). Bilangan kompleks $z_1 = 3 - 2i$ berbeda $z_2 = 4 + 2i$, karena bagian real dari z_1 adalah 3 dan bagian real dari z_2 adalah 4. Selain itu, bagian imajiner dari z_1 adalah -2 dan bagian imajiner dari z_2 adalah 2. Karena $\text{Re}(z_1) \neq \text{Re}(z_2)$ dan $\text{Im}(z_1) \neq \text{Im}(z_2)$ maka diperoleh $z_1 \neq z_2$.

b). Bilangan kompleks $z_1 = 1 + i$ berbeda $z_2 = 1 - i$, Meskipun $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$, namun bagian imajiner dari z_1 adalah 1 dan bagian imajiner dari z_2 adalah -1. Dikarenakan $\text{Im}(z_1) \neq \text{Im}(z_2)$ maka diperoleh $z_1 \neq z_2$.

c). Bilangan kompleks $z_1 = 1 + i$ sama $z_2 = i + 1$. Karena $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) = 1$ $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$ maka diperoleh $z_1 = z_2$.

Tentukan apakah setiap bilangan kompleks berikut sama atau berbeda.

a). $z_1 = 4 - (-2i)$ dan $z_2 = 4 + 2i$

b). $z_1 = i$ dan $z_2 = 1 - i$

c). $z_1 = -1 + i$ dan $z_2 = i + 1$

Bilangan kompleks

Kerjakan latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Setiap bilangan real adalah bilangan kompleks
2. *Benar atau salah.* Bilangan kompleks mempunyai 3 bentuk yakni bentuk kartesius, bentuk eksponen, dan bentuk logaritma.
3. *Benar atau salah.* Bilangan kompleks $z = 1 - 3i$ jika digambarkan pada bidang kompleks, maka berada dikuadran III.

Penerapan Konsep

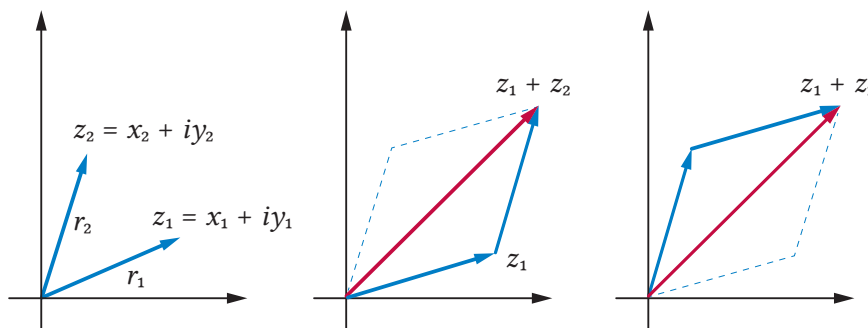
4. Nyatakan bilangan kompleks $2 + 2i$ dalam bentuk polar dan eksponen.
5. Tentukan bilangan x dan y dengan $z_1 = x + 3i$ dan $z_2 = 3 - yi$ agar $z_1 = z_2$!
6. Tentukan solusi dari persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 6 = 0$!
7. Tentukan persamaan kuadrat yang mempunyai solusi $x_1 = 1 + i$ dan $x_2 = 1 - i$!

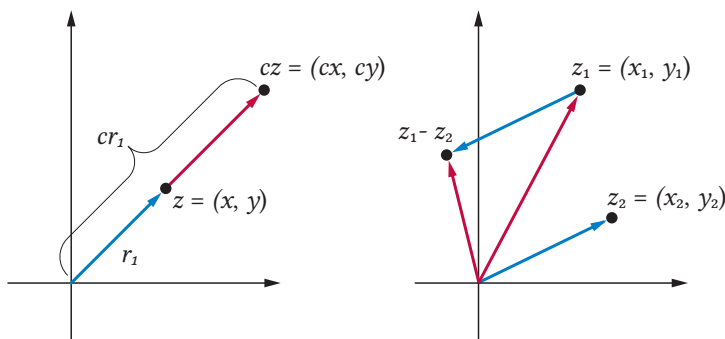
B. Operasi pada Bilangan Kompleks

Pada subbab sebelumnya kalian telah mempelajari tentang pengertian dan bentuk bilangan kompleks. Bilangan kompleks dimasukkan juga sebagai Perluasan bilangan real. Pada bilangan real, kita sudah mengenal bagaimana

operasi penjumlahan, perkalian dan pembagian. Pada bagian ini, akan dipelajari tentang operasi penjumlahan, perkalian, dan pembagian dari bilangan kompleks.

1. Operasi Penjumlahan pada Bilangan Kompleks

Proses menjumlahkan dua bilangan kompleks dan mengalikan skalar dengan bilangan kompleks juga dapat digambarkan dengan grafik seperti menjumlahkan dua vektor. Ketika menjumlahkan dua bilangan kompleks dengan menggunakan grafik, hal pertama yang dilakukan kita tarik ruas garis dari titik pusat bidang kompleks ke posisi bilangan kompleks, seperti yang ditunjukkan Gambar 1.4. Hasilnya, penjumlahan dari dua bilangan kompleks merupakan titik ujung diagonal jajar genjang.

Gambar 1.4 Penjumlahan Dua Bilangan Kompleks

Secara geometris, bilangan kompleks yang merupakan hasil kali antara bilangan kompleks $z = x + iy$ dan skalar c memiliki panjang $|c|$ kali $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Gambar 1.5 berikut mengilustrasikan perkalian bilangan kompleks dengan skalar, serta pengurangan dua bilangan kompleks.

Gambar 1.5 Ilustrasi Perkalian Skalar dan Pengurangan Bilangan Kompleks

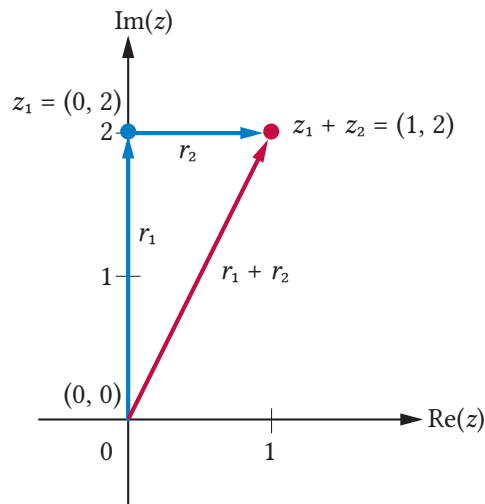
Agar dapat memahami lebih dalam tentang penjumlahan bilangan kompleks, coba perhatikan Contoh 1.7 berikut.

Contoh 1.7

Penjumlahan Bilangan Kompleks

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z_1 = 2i = (0,2)$ dan $z_2 = 1 = (1,0)$ seperti pada Gambar 1.6 berikut. Tentukan hasil dari $z_1 + z_2$?

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan penjumlahan dari z_1 dan z_2, kalian dapat memanfaatkan sifat penjumlahan vektor yang telah dipelajari pada kelas X. Perhatikan ilustrasi Gambar 1.6 berikut.

Gambar 1.6 Penjumlahan Bilangan Kompleks.

Secara sederhana, penjumlahan bilangan kompleks $z_1 = 2i = (0,2)$ dan $z_2 = 1 = (1,0)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$z_1 + z_2 = (0 + 2i) + (1 + 0i) = (0 + 1) + (2i + 0i) = 1 + 2i\ .$$

Jika diberikan bilangan kompleks $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 1 - i$. Tentukan $z_1 + z_2$. Jika $z_3 = z_1 + z_2$, bagaimana bentuk dari $z_3 + z_1$?

Secara umum, penjumlahan dua bilangan kompleks dilakukan dengan cara menjumlahkan setiap bagian real dan menjumlahkan setiap bagian imajiner, yakni jika $z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$, maka

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Penjumlahan dua bilangan kompleks beserta operasi-operasi lainnya dirangkum berikut ini.

Definisi 1.5

Penjumlahan dan Perkalian Skalar bilangan kompleks

Misalkan c adalah sebuah skalar, $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ merupakan dua bilangan kompleks maka berlaku sifat sebagai berikut.

a). Penjumlahan bilangan kompleks z_1 dan z_2 adalah bilangan kompleks

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

b). Perkalian skalar c dan z_1 adalah bilangan kompleks

$$cz_1 = cx_1 + icy_1 = (cx_1, cy_1)$$

c). Negatif dari z_1 adalah bilangan kompleks

$$-z_1 = -(x_1 + iy_1) = -x_1 - iy_1 = (-x_1, -y_1)$$

d). Selisih z_1 dan z_2 adalah bilangan kompleks

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$$

Untuk lebih memahami penjumlahan bilangan kompleks dan perkalian skalar, cermati Contoh 1.8 berikut.

Contoh 1.8

Penjumlahan Bilangan Kompleks dan Perkalian skalar

Jika $z_1 = (2, \frac{1}{2}) = 2 + \frac{1}{2}i$ dan $z_2 = (-3, \sqrt{2}) = -3 + \sqrt{2}\,i$, tentukan $2z_1$, $z_1 + 3z_2$ dan $2z_1 - z_2$

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan definisi penjumlahan bilangan kompleks dan perkalian skalar, kita peroleh hasil berikut.

$$2z_1 = 2\left(2 + \frac{1}{2}i\right) = 4 + i$$

$$\begin{aligned} z_1 + 3z_2 &= \left(2 + \frac{1}{2}i\right) + 3\left(-3 + \sqrt{2}i\right) \\ &= \left(2 + \frac{1}{2}i\right) + \left(-9 + 3\sqrt{2}i\right) \\ &= -7 + i\left(\frac{1}{2} + 3\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2 &= 2\left(2 + \frac{1}{2}i\right) - \left(-3 + \sqrt{2}i\right) \\ &= (4 + i) - \left(-3 + \sqrt{2}i\right) \\ &= 7 + i(1 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Diberikan $z_1 = -2 - 4i$ dan $z_2 = -8 + 6i$. Tentukan $3z_1$ dan $3z_1 - 2z_2$.

Kalian telah mempelajari tentang operasi penjumlahan dua bilangan kompleks dan perkalian skalar bilangan real dengan bilangan kompleks. Di aktivitas eksplorasi berikutnya kalian akan menyelidiki sifat-sifat operasi bilangan kompleks. Apakah sifat-sifatnya sama-sama dengan sifat-sifat operasi pada bilangan real? Mari, kita selidiki.

Bagaimana sifat-sifat operasi bilangan kompleks?

Penjumlahan bilangan-bilangan real memiliki beberapa sifat, di antaranya komutatif dan asosiatif. Sifat-sifat ini juga berlaku untuk perkalian bilangan-bilangan kompleks. Selain itu, kalian juga telah mengetahui bahwa perkalian bilangan real bersifat distributif terhadap penjumlahan. Apakah sifat-sifat

ini juga berlaku pada operasi-operasi bilangan kompleks yang baru kalian pelajari?

Untuk menemukan jawabannya, misalkan diberikan tiga bilangan kompleks, yaitu

$$z_1 = 1 - i\text{, } z_2 = 3 + 2i\text{, dan } z_3 = -2 + 3i$$

dan dua skalar, yaitu $c = -4$ dan $d = 7$.

1. Tentukan hasil penjumlahan dua bilangan kompleks berikut.

   $z_1 + z_2 = \ldots\ldots$

   $z_2 + z_1 = \ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian simpulkan?

2. Tentukan hasil penjumlahan tiga bilangan kompleks berikut.

   $(z_1 + z_2) + z_3 = \ldots\ldots$

   $z_1 + (z_2 + z_3) = \ldots\ldots$

   Dari hasil tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?

3. Bilangan kompleks nol adalah bilangan kompleks yang semua bagian real dan imajinernya nol, $0 = (0,0) = 0 + 0i$. Tentukan penjumlahan z_1 dengan 0.

   $z_1 + 0 = \ldots\ldots$

   Apa yang kalian peroleh?

4. Tentukan hasil penjumlahan suatu bilangan kompleks dengan negatifnya berikut.

   $z_1 + (-z_1) = \ldots\ldots$

   Apa yang kalian peroleh?

5. Dua skalar dapat dikalikan dengan suatu bilangan kompleks dengan cara $c(dz_1)$ atau $(cd)z_1$. Tentukan hasil perkalian skalar berikut.

   $c(dz_1) = \ldots\ldots$

   $(cd)z_1 = \ldots\ldots$

Dari hasil tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?

6. Hitung hasil perkalian skalar dan penjumlahan bilangan kompleks berikut.

   $(c+d)z_1 = \ldots\ldots$

   $cz_1 + dz_1 = \ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian simpulkan?

7. Tentukan hasil perkalian skalar dengan penjumlahan dua bilangan kompeks berikut.

   $c(z_1 + z_2) = \ldots\ldots$

   $cz_1 + cz_2 = \ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian peroleh?

8. Tentukan hasil perkalian skalar 0 dan 1 dengan bilangan kompleks z_1 berikut.

   $(1)z_1 = \ldots\ldots$

   $(0)z_1 = \ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian peroleh dari hasil tersebut?

Berdasarkan eksplorasi sebelumnya, kita mendapatkan sifat-sifat operasi pada bilangan kompleks sebagai berikut.

Sifat 1.1

Operasi Bilangan Kompleks

Misalkan z_1, z_2, dan z_3 adalah bilangan kompleks, serta c dan d adalah skalar.

a. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — Sifat komutatif

b. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ — Sifat asosiatif

c. $z_1 + 0 = z_1$ — Sifat identitas penjumlahan

d. $z_1 + (-z_1) = 0$ — Sifat invers penjumlahan

e. $c(dz_1) = (cd)z_1$

f. $(c+d)z_1 = cz_1 + dz_1$ Sifat distributif

g. $c(z_1 + z_2) = cz_1 + cz_2$ Sifat distributif

h. $(1)z_1 = z_1$

i. $(0)z_1 = 0$

Untuk lebih memahami penggunaan sifat-sifat tersebut, perhatikan Contoh 1.9 berikut.

Contoh 1.9

Menggunakan Sifat-Sifat Operasi Bilangan kompleks

Untuk sembarang bilangan kompleks z, tunjukkan bahwa $4z + (-4)z = 0$

Alternatif Penyelesaian

Untuk menunjukkan persamaan yang diberikan, kita gunakan sifat distributif bersama dengan sifat perkalian dengan skalar nol. Untuk sembarang bilangan kompleks z, berlaku

$$4z + (-4)z = (4 + (-4))z = (0)z = 0$$

Jadi, terbukti bahwa $4z + (-4)z = 0$.

Buktikan bahwa $3z - \frac{1}{2}(2z) = 2z$ untuk sembarang bilangan kompleks z.

Berikutnya kalian akan mempelajari bagaimana perkalian dua bilangan kompleks dan pembagian dua bilangan kompleks.

2. Perkalian Bilangan Kompleks

Kalian telah mempelajari sifat penjumlahan bilangan kompleks, selanjutnya akan kalian pelajari operasi perkalian dua buah bilangan kompleks. Untuk memahami perkalian dua bilangan kompleks, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.10

Perkalian Bilangan Kompleks

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z_1 = 2 + i$ dan $z_2 = 1 - 2i$ maka tentukanlah $z_1 \times z_2$.

Alternatif Penyelesaian

Perkalian yang diberikan dapat diselesaikan dengan cara berikut.

$z_1 \times z_2 = (2+i)(1-2i)$	Persamaan yang diberikan
$= 2(1-2i) + i(1-2i)$	Berdasarkan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
$= (2-4i) + (i-2i^2)$	Sifat perkalian bilangan kompleks dengan skalar
$= (2-4i) + (i-2(-1))$	$i^2 = -1$
$= (2-4i) + (i+2)$	
$= (2+2) + (-4i+i)$	
$= 4-3i$	

Jadi, hasil perkalian dari $z_1 = 2 + i$ dan $z_2 = 1 - 2i$ adalah $4 - 3i$.

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z_1 = 1 + i$ dan $z_2 = \frac{1}{2} - 2i$, maka tentukanlah $z_1 \times z_2$.

Proses perkalian bilangan kompleks memanfaatkan sifat distributif perkalian dengan penjumlahan dan perkalian skalar dengan bilangan kompleks. Berikut ini bentuk perkalian dua bilangan kompleks secara umum, misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka diperoleh

$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$	Persamaan yang diberikan
$= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2)$	Berdasarkan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

$$=(x_1x_2+ix_1y_2)+(ix_2y_1+i^2y_1y_2)$$ Sifat perkalian bilangan kompleks dengan skalar

$$=(x_1x_2+ix_1y_2)+(ix_2y_1+(-1)y_1y_2)$$ $i^2=-1$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(ix_1y_2+ix_2y_1)$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

Jadi, diperoleh

$$z_1\times z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

Aktivitas eksplorasi berikutnya, kalian akan menyelidiki sifat-sifat operasi bilangan kompleks. Apakah sifat-sifatnya sama-sama dengan sifat-sifat operasi perkalian pada bilangan real? Mari, kita selidiki.

Bagaimana sifat-sifat operasi perkalian bilangan kompleks?

Perkalian bilangan-bilangan real memiliki beberapa sifat, di antaranya komutatif, asosiatif, serta memiliki identitas dan invers (lawan). Selain itu, perkalian bilangan real bersifat distributif terhadap penjumlahan. Apakah sifat-sifat ini juga berlaku pada operasi perkalian bilangan kompleks yang baru kalian pelajari?

Untuk menemukan jawabannya, misalkan diberikan tiga bilangan kompleks, yaitu

$z_1=1-i$, $z_2=3+2i$, dan $z_3=-2+3i$

dan dua skalar, yaitu $c = -4$ dan $d = 7$.

1. Tentukan hasil perkalian dua bilangan kompleks berikut.

   $z_1\times z_2=\ldots\ldots$

   $z_2\times z_1=\ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian simpulkan?

2. Tentukan hasil perkalian tiga bilangan kompleks berikut.

   $(z_1 \times z_2) \times z_3 = \ldots\ldots$

   $z_1 \times (z_2 \times z_3) = \ldots\ldots$

   Dari hasil tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?
3. Bilangan kompleks satuan adalah bilangan kompleks yang bagian real 1 dan imajinernya nol, 1= (1,0). Tentukan perkalian z_1 dengan 1.

   $z_1 \times 1 = \ldots\ldots$

   Apa yang kalian peroleh?
4. Hitung hasil perkalian bilangan kompleks dengan penjumlahan bilangan kompleks berikut.

   $z_1(z_2 + z_3) = \ldots\ldots$

   $(z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3) = \ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian simpulkan?

Berdasarkan eksplorasi sebelumnya, kalian mendapatkan sifat-sifat perkalian pada bilangan kompleks sebagai berikut.

Sifat 1.2

Operasi Perkalian Bilangan Kompleks

Misalkan z_1, z_2, dan z_3 adalah bilangan kompleks maka diperoleh:

1. $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ — Sifat Komutatif
2. $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$ — Sifat Asosiatif
3. $1 \times z = z = z \times 1$ — Sifat Identitas Perkalian
4. $z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$ — Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

Untuk lebih memahami penggunaan sifat-sifat tersebut, perhatikan Contoh 1.11 berikut.

Contoh 1.11

Menggunakan Sifat-Sifat Perkalian Operasi Bilangan Kompleks

Untuk sembarang bilangan kompleks z_1 dan z_2, tunjukkan bahwa $(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menunjukkan persamaan yang diberikan, gunakan sifat distributif bersama dengan sifat komutatif. Perhatikan bahwa,

$(z_1+z_2)^2 = (z_1+z_2)(z_1+z_2)$	Persamaan yang diberikan
$= z_1(z_1+z_2) + z_2(z_1+z_2)$	Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
$= (z_1z_1 + z_1z_2) + (z_2z_1 + z_2z_2)$	Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$	Sifat komutatif perkalian

Jadi, terbukti bahwa $(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$.

Buktikan bahwa $(z_1-z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$ untuk sembarang bilangan kompleks z_1 dan z_2.

Kalian akan mempelajari bagaimana bentuk invers perkalian dari bilangan kompleks. Misalkan diberikan bilangan kompleks $z = x + iy \neq 0$ dan $z^{-1} = u + iv$ invers perkalian dari z maka diperoleh

$1+0i = z \times z^{-1}$	Persamaan yang diberikan
$= (x+iy)(u+iv)$	
$= (xu - yv) + i(xv + uy)$	Sifat perkalian dua bilangan kompleks

Berdasarkan Definisi 1.2 tentang kesamaan 2 bilangan kompleks, maka diperoleh

$xu - yv = 1$ Persamaan 1

$xv + uy = 0$ Persamaan 2

Kalikan x pada persamaan 1 dan kalian y pada persamaan 2, maka diporoleh

$x^2u - xyv = x$ Persamaan 3

$xyv + uy^2 = 0$ Persamaan 4

Jumlahkan Persamaan 3 dan 4, maka diperoleh $x^2u + uy^2 = x$. Dengan menyederhanakan bentuk persamaan ini maka diperoleh $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Selanjutnya, substitusikan u ke dalam Persamaan 2, didapat

$$xv = -\frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Karena hal ini berlaku untuk sembarang z bilangan kompleks tak nol, artinya juga berlaku untuk x yang tak nol maka diperoleh $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

Jadi, diperoleh, $z^{-1} = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ adalah invers dari $z = x + iy$.

Untuk lebih memahami bentuk invers dari bilangan kompleks, perhatikan Contoh 1.12 berikut.

Contoh 1.12

Invers Bentuk Bilangan Kompleks

Diberikan bilangan kompleks z=(1,-1), tentukan invers dari z.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan untuk bilangan kompleks $z = x + iy$, maka diperoleh bentuk invers $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$. Akibatnya, diperoleh

invers dari $z = 1 - i$ adalah $z^{-1} = \frac{1}{1+(-1)^2} - i\frac{(-1)}{1+(-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ atau dapat dituliskan $z^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Diberikan bilangan kompleks $z_1 = 1 - i$ dan $z_2 = 2 + 3i$, tentukan invers dari $z_1 + z_2$.

Mari Berpikir Kreatif

Dengan memanfaatkan pengetahuan yang ada, bisakah kalian menentukan bagian real dan bagian imajiner dari bilangan kompleks $z = \frac{1+3i}{2-i}$? Kemudian, jelaskan bagaimana caranya mendapatkan bagian real dan bagian imajner dari bilangan kompleks tersebut?

Kalian telah mempelajari tentang sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks, dari hasil tersebut dapat kita simpulkan sebagai berikut.

Sifat 1.3

Sifat Operasi pada Bilangan Kompleks

a). Jika $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

b). Jika $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka $z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$

c). $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

d). $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$

e). $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

f). $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$

g). Terdapat $0 \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $0 + z = z = z + 0$ untuk setiap $1 \in \mathbb{C}$

h). Terdapat $1 \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $1 \times z = z = z \times 1$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$

i). Misalkan $z \in \mathbb{C}$ maka terdapat $-z \in \mathbb{C}$ dimana berlaku $z + (-z) = 0$

j). Misalkan $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ maka terdapat $z^{-1} \in \mathbb{C}$ dimana berlaku $z \times z^{-1} = 1$

k). $z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$

Operasi Bilangan Kompleks

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Setiap penjumlahan bilangan kompleks akan menghasilkan bilangan kompleks juga.

2. *Benar atau salah.* Jika diberikan bilangan kompleks $z_1 = (1, 2)$ dan $z_2 = (3, 4)$, maka $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2}{25}, \frac{11}{25}\right)$

3. *Benar atau salah.* Misalkan z_1 dan z_2 dua bilangan kompleks, maka diperoleh $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)$

Penerapan Konsep

Tentukan hasil penjumlahan dan perkalian dua bilangan kompleks pada nomor 4 dan 5.

4. $z_1 = 3 + 2i$ dan $z_2 = 2 - 3i$

5. $z_1 = 3 + \sqrt{2}i$ dan $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 3i$

Tentukan invers dari setiap bilangan kompleks pada nomor 6 dan 7.

6. $1 + i$

7. $\frac{1}{i}$

8. Tentukan bilangan real x dan y yang memenuhi $(1 + 2i)x + (1 - 2i)y = 1 - i$

9. Tentukan bilangan real x dan y yang memenuhi $\frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = 1$

C. Konjugat, Modulus, dan Argumen Bilangan Kompleks Beserta Sifat-Sifatnya

1. Konjugat Bilangan Kompleks

Kalian telah mempelajari tentang pengertian dan bentuk bilangan kompleks. Perhatikan bahwa, setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ mempunyai sekawannya yakni $\overline{z} = x - iy$. Untuk memahami lebih detail tentang sekawan bilangan kompleks perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.13

Sekawan Bilangan Kompleks

Tentukan sekawan setiap bilangan kompleks berikut!

a). $2 + i$

b). 2

c). $3 - 2i$

d). $3i$

Alternatif Penyelesaian.

a). Bilangan kompleks $2+i$ mempunyai bentuk sekawan $2-i$.

b). Bilangan 2 dapat dinyatakan dalam bentuk $2+0i$, sehingga bentuk sekawan dari $2+0i$ adalah $2-0i = 2$.

c). Bilangan kompleks $3-2i=3+(-2i)$ mempunyai bentuk sekawan $3-(-2i)=3+2i$.

d). Bilangan kompleks $3i$ dapat dinyatakan dalam bentuk $0+3i$, sehingga bentuk sekawan dari $0+3i$ adalah $0-3i=-3i$.

Tentukan sekawan setiap bilangan kompleks berikut!

a). $2 + i^2$

b). $1 + \frac{1}{i}$

c). $1 + 2i$

Bentuk sekawan bilangan kompleks $z = x + iy$ yakni $\overline{z} = x - iy$ dinamakan juga sebagai konjugat dari bilangan kompleks $z = x + iy$. Adapun definisi dari konjugat bilangan kompleks adalah sebagai berikut.

Definisi 1.6

Konjugat Bilangan Kompleks

Misalkan $z = x + iy$ adalah bilangan kompleks, konjugat dari z dinotasikan $\overline{z}$ dan dinyatakan dalam bentuk $\overline{z} = x - iy$.

Mari Berpikir Kritis

Mungkinkah ada bilangan kompleks $z=x+iy$ yang sama dengan konjugatnya? Jika ada tentukan syarat suatu bilangan kompleks sama dengan konjugatnya!

Di aktivitas eksplorasi berikutnya kita akan menyelidiki sifat-sifat operasi konjugat bilangan kompleks. Apakah sifat-sifatnya sama dengan sifat-sifat pada bilangan kompleks? Mari, kita selidiki.

Bagaimana sifat-Sifat konjugat bilangan kompleks?

Apakah konjugat dari penjumlahan bilangan kompleks sama dengan jumlah dari konjugat setiap bilangan kompleks? Apakah konjugat dari perkalian dua bilangan kompleks sama dengan hasil kali dari setiap konjugat bilangan tersebut?

Untuk menemukan jawabannya, misalkan diberikan dua bilangan kompleks, yaitu.

$z_1 = 1 - i$ dan $z_2 = 3 + 2i$,

1. Tentukan hasil konjugat dari penjumlahan dua bilangan kompleks berikut.

   $\overline{z_1 + z_2} = \ldots\ldots$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \ldots\ldots$$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

2. Tentukan hasil konjugat dari pengurangan dua bilangan kompleks berikut.

$$\overline{z_1 - z_2} = \ldots\ldots$$

$$\overline{z_1} - \overline{z_2} = \ldots\ldots$$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

3. Tentukan hasil konjugat dari perkalian dua bilangan kompleks berikut.

$$\overline{z_1 \times z_2} = \ldots\ldots$$

$$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \ldots\ldots$$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

4. Tentukan hasil konjugat dari pembagian dua bilangan kompleks berikut.

$$\overline{z_1 : z_2} = \ldots\ldots$$

$$\overline{z_1} : \overline{z_2} = \ldots\ldots$$

Dari hasil tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?

5. Diberikan bilangan kompleks $z=1-i$. Tentukan konjugat dari invers bilangan kompleks berikut.

$$\overline{z^{-1}} = \ldots\ldots$$

$$\left(\overline{z}\right)^{-1} = \ldots\ldots$$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

6. Diberikan bilangan kompleks $z_1 = 1 - i$ maka diperoleh $\overline{z_1} = 1 + i$. Kemudian tentukanlah $\overline{\overline{z_1}} = \ldots\ldots$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

7. Tentukan hasil perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya berikut.

$z_1 \times \overline{z_1} = \ldots\ldots$

$[\text{Re}(z_1)]^2 + [\text{Im}(z_1)]^2 = \ldots\ldots$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

8. Tentukan hasil pengurangan bilangan kompleks dengan konjugatnya berikut.

$z_1 - \overline{z_1} = \ldots\ldots$

$2i\,\text{Im}(z_1) = \ldots\ldots$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

9. Tentukan hasil penjumlahan bilangan kompleks dengan konjugatnya berikut.

$z_1 + \overline{z_1} = \ldots\ldots$

$2\,\text{Re}(z_1) = \ldots\ldots$

Apa yang dapat kalian simpulkan?

Berdasarkan eksplorasi sebelumnya, kalian mendapatkan sifat-sifat operasi pada konjugat dari bilangan kompleks sebagai berikut.

Sifat 1.4

Operasi Konjugat Bilangan Kompleks

Misalkan z, z_1 dan z_2, adalah bilangan kompleks maka diperoleh:

a). $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b). $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

c). $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

d). $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, untuk $z_2 \neq 0$

e). $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$

f). $\bar{\bar{z}} = z$

g). $z \times \bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$

h). $z - \bar{z} = 2i\,\text{Im}(z)$

i). $z + \bar{z} = 2\,\text{Re}(z)$

Untuk lebih memahami penggunaan sifat-sifat tersebut, perhatikan Contoh 1.14 berikut.

Contoh 1.14

Operasi pada Konjugat Bilangan Kompleks

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z = x + iy$, tentukan nilai x dan y yang memenuhi $Im\left(\overline{3i + 3\bar{z}}\right) = 9$.

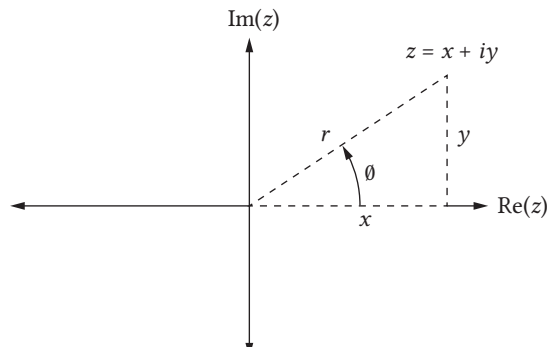
Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa untuk bilangan kompleks $z = x + iy$, maka diperoleh $3i + 3\bar{z} = 3i + 3(x - iy) = 3x + i(3 - y)$. Dengan memanfaatkan definisi konjugat atau Sifat 3.1 (1) diperoleh $\overline{3i + 3\bar{z}} = 3x + i(y - 3)$ Karena $Im\left(\overline{3i + 3\bar{z}}\right) = 9$, atau y–3 = 9 maka diperoleh y = 12 dan x sembarang bilangan real.

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z = x + iy$, tentukan nilai x dan y yang memenuhi $\text{Re}\left(\overline{2i + 2\bar{z}}\right) = 8$.

Diberikan bilangan kompleks $z = x + iy$. Bisakah kalian menyatakan bagian real z dan imajiner z dalam bentuk z dan $\bar{z}$.

2. Modulus dan Argumen Bilangan Kompleks

Pada subbab A telah diberikan representasi bilangan kompleks pada bidang kompleks. Lihat kembali Gambar 1.3 pada subbab A sebagai berikut.

Pada subbab A dijelaskan bahwa dengan memanfaatkan aturan Trigonometri maka diperoleh $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Perhatikan bahwa, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dinyatakan sebagai modulus dari z. Definisi dari modulus dari z dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 1.7

Modulus Bilangan Kompleks

Modulus bilangan kompleks $z = x + iy$ adalah

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Untuk lebih memahami modulus dari bilangan kompleks, cermati contoh berikut.

Contoh 1.15

Modulus Bilangan Kompleks

Tentukan modulus setiap bilangan kompleks berikut

a). $z_1 = 2 + i$

b). $z_2 = 2$

c). $z_3 = 3 - 2i$

d). $z_4 = 3i$

Alternatif Penyelesaian

a). Bilangan kompleks $z_1 = 2 + i$ mempunyai modulus $|z_1| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$

b). Bilangan $z_2 = 2$ dapat dinyatakan dalam bentuk $2+0i$, sehingga mempunyai modulus $|z_2| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} = 2$

c). Bilangan kompleks $z_3 = 3 - 2i$ mempunyai modulus $|z_3| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

d). Bilangan kompleks $z_4 = 3i$ dapat dinyatakan dalam bentuk $0+3i$, sehingga mempunyai modulus $|z_3| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = 3$

Tentukan modulus setiap bilangan kompleks berikut.

a). $2 + i^2$

b). $1 + \frac{1}{i}$

c). $1 + 2i$

Di aktivitas eksplorasi berikutnya, kita akan menyelidiki sifat-sifat modulus bilangan kompleks. Mari, kita selidiki.

Bagaimana sifat-sifat modulus bilangan kompleks?

Apakah modulus dari penjumlahan bilangan kompleks sama dengan jumlah dari modulus setiap bilangan kompleks? Apakah modulus perkalian dari perkalian dua bilangan kompleks sama dengan hasil kali dari setiap modulus bilangan tersebut? Bagaimana sifat-sifat lainnya dari modulus bilangan kompleks?

Untuk menemukan jawabannya, misalkan diberikan dua bilangan kompleks, yaitu

$$z_1 = 1 - i \text{ dan } z_2 = 3 + 2i,$$

1. Tentukan modulus dari bilangan kompleks berikut.

   $|z_1| = \ldots\ldots$

   $|-z_1| = \ldots\ldots$

   $|\overline{z_1}| = \ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian simpulkan?

2. Tentukan hasil modulus dari pengurangan dua bilangan kompleks berikut.

   $|z_1 - z_2| = \ldots\ldots$

   $|z_2 - z_1| = \ldots\ldots$

   Apa yang dapat kalian simpulkan?

3. Tentukan hasil kuadrat dari modulus bilangan kompleks berikut.

   $|z_1|^2 = \ldots\ldots$

   $|z_1^2| = \ldots\ldots$

   $z_1 \times \overline{z_1} = \ldots\ldots$

   Dari hasil tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?

4. Tentukan hasil perkalian dari modulus bilangan kompleks berikut.

   $|z_1| \times |z_2| = \ldots\ldots$

   $|z_1 \times z_2| = \ldots\ldots$

   Dari hasil tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?

5. Tentukan hasil pembagian dari modulus bilangan kompleks berikut.

   $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \ldots\ldots$

   $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \ldots\ldots$

   Dari hasil tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?

6. Tentukan hasil penjumlahan dari modulus bilangan kompleks berikut.

   $|z_1| + |z_2| = \ldots\ldots$

   $|z_1 + z_2| = \ldots\ldots$

   Dari hasil di atas, apa yang dapat kalian simpulkan?

Berdasarkan eksplorasi sebelumnya, kita mendapatkan sifat-sifat operasi pada modulus dari bilangan kompleks sebagai berikut.

Sifat 1.5

Operasi Modulus Bilangan Kompleks

Misalkan z_1 dan z_2, adalah bilangan kompleks maka diperoleh:

a). $|z_1| = |-z_1| = |\overline{z_1}|$

b). $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

c). $|z_1^2| = |z_1|^2 = z_1 \times \overline{z_1}$

d). $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

e). $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

f). $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$, lebih jauh diperoleh $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Untuk lebih memahami penggunaan sifat modulus pada Sifat 1.5 perhatikan Contoh 1.16 berikut.

Contoh 1.16

Modulus Bilangan Kompleks

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z = \dfrac{1 - 2i}{3 + 4i}$. Tentukanlah $|z|$.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa untuk bilangan kompleks $z = \frac{1-2i}{3+4i}$ dapat dipandang menjadi $z = \frac{z_1}{z_2}$ untuk $z_1 = 1-2i$ dan $z_2 = 3+4i$. Sehingga diperoleh

$$|z| = \left|\frac{1-2i}{3+4i}\right| = \frac{\sqrt{1^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z = \frac{1-2i}{3+4i}$. Tentukanlah $|\overline{z}|$.

Kalian telah mempelajari modulus dari bilangan kompleks beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya, perhatikan kembali Gambar 1.3, θ pada pada Gambar 1.3 dinyatakan sebagai argumen dari *z*. Definisi dari argumen utama dari *z* dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 1.8

Argumen Utama Bilangan Kompleks

Diberikan bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka θ dinyatakan sebagai argumen utama dari *z* dan dinotasikan dengan $Arg(z) = \theta$ dan $0 \le \theta < 2\pi$.

Untuk lebih memahami argumen utama dari bilangan kompleks, cermati contoh berikut.

Contoh 1.17

Argumen Utama Bilangan Kompleks

Tentukan argumen utama setiap bilangan kompleks berikut.

a). $z = 1+i$

b). $z = \sqrt{3}+i$

Alternatif Penyelesaian

a). Memanfaatkan Contoh 1.4, bilangan kompleks $z = 1 + i$ mempunyai bentuk polar $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$. Oleh karena itu diperoleh argumen utama dari z adalah $Arg(z) = 45^\circ$

b). Bilangan kompleks $z = \sqrt{3} + i$ mempunyai bentuk polar $z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$. Oleh karena itu diperoleh argumen utama dari z adalah $Arg(z) = 30^\circ$

Tentukan argumen utama bilangan kompleks berikut.

a). $1 + \sqrt{3}i$

b). $-i$

Argumen bilangan kompleks z, bukanlah suatu besaran yang tunggal. Setiap bilangan kompleks z mempunyai tak hingga banyaknya argumen yang berbeda satu sama lainnya dengan kelipatan 2π. Perhatikan bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, dengan memanfaatkan aturan pada trigonometri diperoleh $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$ untuk suatu k bilangan bulat.

Oleh karena itu, argumen dari bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dapat dinyatakan $Arg(z) = \{\theta + 2k\pi : \text{untuk } k \text{ bilangan bulat}\}$.

Contoh 1.18

Argumen Bilangan Kompleks

Tentukan argumen setiap bilangan kompleks berikut.

a). $z = 1 + i$

b). $z = \sqrt{3} + i$

Alternatif Penyelesaian

a). Memanfaatkan Contoh 1.17, argumen bilangan kompleks $z = 1 + i$ adalah $Arg(z) = 45^\circ + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

b). Argumen bilangan kompleks $z = \sqrt{3} + i$ adalah $Arg(z) = 30^\circ + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

Tentukan argumen bilangan kompleks berikut.

a). $1 + \sqrt{3}i$

b). $-i$

Kalian telah mempelajari tentang kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk kartesius. Selanjutnya, misalkan diberikan dua bilangan kompleks dalam bentuk polar yakni $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ maka $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $r_1 = r_2$ dan $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

Untuk lebih memahami kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk polar, cermati contoh berikut.

Contoh 1.19

Kesamaan dua Bilangan Kompleks

Tentukan apakah setiap bilangan kompleks berikut sama atau berbeda.

a). $z_1 = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ dan $z_2 = \sqrt{2}(\cos 95^\circ + i\sin 95^\circ)$

b). $z_1 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$ dan $z_2 = (\cos 390^\circ + i\sin 390^\circ)$

Alternatif Penyelesaian

a). Perhatikan bahwa $Arg(z_1) = 45^\circ$ dan $Arg(z_2) = 95^\circ$. Karena $Arg(z_1) - Arg(z_2) \neq 2k\pi$ untuk berapapun nilai k bilangan bulat maka diperoleh $z_1 \neq z_2$.

Perhatikan bahwa

b). $|z_1| = 1 = |z_2|$ dan $Arg(z_1) - Arg(z_2) = 30^\circ - 390^\circ = -360^\circ = 2\pi(-1)$ maka diperoleh $z_1 = z_2$.

Tentukan apakah setiap bilangan kompleks berikut sama atau berbeda.

a). $z_1 = 2$ dan $z_2 = 2(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ)$

b). $z_1 = (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ dan $z_2 = 2e^{i390^\circ}$

Selanjutnya, akan diberikan sifat-sifat dari argumen pada operasi bilangan kompleks sebagai berikut.

Sifat 1.6

Sifat Argumen Pada Bilangan Kompleks

Misalkan $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ adalah dua bilangan kompleks maka diperoleh

a). Argumen dari $z_1 \times z_2$ adalah

$$Arg(z_1 \times z_2) = \{Arg(z_1) + Arg(z_2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

b). Misalkan $z_2 \neq 0$, argumen dari $\frac{z_1}{z_2}$ adalah

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{Arg(z_1) - Arg(z_2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Untuk lebih memahami agrumen dari operasi dua bilangan kompleks, cermati contoh berikut.

Contoh 1.20

Argumen dua Bilangan Kompleks

Tentukan argumen hasil perkalian dan pembagian dari dua kompleks $z_1 = 2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ dan $z_2 = 3(\cos 95^\circ + i\sin 95^\circ)$.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa, $Arg(z_1) = 45^\circ$ dan $Arg(z_2) = 95^\circ$. Dengan memanfaatkan sifat argumen maka diperoleh argumen hasil perkalian z_1 dan z_2 adalah $Arg(z_1 \times z_2) = \{140^\circ + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Sedangkan argumen hasil pembagian z_1 dan z_2 adalah $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{-50^\circ + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Tentukan argumen hasil perkalian dan pembagian dari dua kompleks $z_1 = 2$ dan $z_2 = 2(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)$.

Mari Berkolaborasi

Perhatikan Sifat 1.6, coba kalian diskusikan bersama teman-teman dalam kelompok di kelas. Bagaimana memperoleh argumen dari hasil perkalian dan pembagian dua bilangan kompleks seperti pada Sifat 1.6? Selanjutnya, bisakah kalian memperoleh argumen dari perkalian bilangan kompleks $z_1, z_2, \cdots, z_n$?

Konjugat, Modulus dan Argumen Bilangan Kompleks

Kerjakan latihan berikut dengan cermat dan tepat!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Setiap bilangan kompleks selalu mempunyai tepat satu konjugat.
2. *Benar atau salah.* Misalkan diberikan bilangan kompleks z_1 dan z_2, maka diperoleh $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

3. *Benar atau salah.* Misalkan diberikan bilangan kompleks z_1 dan z_2, maka diperoleh $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

4. *Benar atau salah.* Misalkan diberikan bilangan kompleks z_1 dan z_2, maka diperoleh $Arg(z_1 + z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

Penerapan Konsep

5. Tentukan konjugat dan modulus dari bilangan kompleks $z = \frac{3+3i}{2+3i} + \frac{4i}{2-3i}$.

6. Misalkan z_1 dan z_2 adalah bilangan kompleks, periksa apakah $z_1 \times \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \times z_2$ bernilai real atau tidak.

7. Misalkan diberikan bilangan kompleks z dengan $z + \frac{1}{z}$ bernilai real dan $\text{Im}(z) \neq 0$, perlihatkan $|z| = 1$.

8. Tentukan semua bilangan kompleks z yang memenuhi $|z| = 1$ dan $|z^2 + \overline{z}^2| = 1$

9. Tentukan nilai r dan θ dengan $z_1 = r(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ dan $z_2 = \cos \theta^\circ + i \sin \theta^\circ$ agar $z_1 = z_2$!

1. Konsep bilangan kompleks dipandang sebagai perluasan dari bilangan real. Konsep bilangan kompleks dimanfaatkan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang tidak dapat diselesaikan dalam himpunan bilangan real.

2. Diberikan dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$ dan sebuah skalar c, kita dapat melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar terhadap kedua bilangan

kompleks tersebut. Definisi operasi-operasi tersebut adalah sebagai berikut.

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $cz_1 = cx_1 + icy_1 = (cx_1, cy_1)$
- $-z_1 = -(x_1 + iy_1) = -x_1 - iy_1 = (-x_1, -y_1)$
- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

3. Sembarang bilangan kompleks tak nol $z = x + iy$ mempunyai invers, $z^{-1} = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$.
4. Operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan kompleks memiliki beberapa sifat-sifat sebagai berikut.
   - Jika $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ Tertutup terhadap operasi penjumlahan
   - Jika $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka $z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$ Tertutup terhadap operasi perkalian
   - $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ Sifat asosiatif untuk penjumlahan
   - $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$ Sifat asosiatif perkalian
   - $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ Sifat komutatif penjumlahan
   - $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ Sifat komutatif perkalian
   - $z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$ Sifat distributif
5. Misalkan diberikan bilangan komplek $z = x + iy$, modulus dari z dinotasikan dengan $|z|$ dan didefinisikan disebagai $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Misalkan z_1 dan z_2, adalah bilangan kompleks, maka sifat-sifat operasi yang berlaku pada modulus bilangan kompleks adalah sebagai berikut.
   - $|z_1| = |-z_1| = |\overline{z_1}|$
   - $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
   - $|z_1^2| = |z_1|^2 = z_1 \times \overline{z_1}$
   - $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$, lebih jauh diperoleh $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

6. Setiap bilangan komplek $z=x+iy$ mempunyai konjugat sekawan $\bar{z} = x - iy$. Misalkan z_1 dan z_2, adalah bilangan kompleks, sifat-sifat yang berlaku pada operasi konjugat bilangan kompleks adalah sebagai berikut.
   - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   - $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
   - $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
   - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, untuk $z_2 \neq 0$
   - $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$
   - $\bar{\bar{z}} = z$
   - $z \times \bar{z} = [\text{Re(z)}]^2 + [\text{Im(z)}]^2$
   - $z_1 - \overline{z_1} = 2i\,\text{Im}(z)$
   - $z_1 + \overline{z_1} = 2\,\text{Re}(z)$
7. Diberikan bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka $Arg(z) = \{\theta + 2k\pi : \text{untuk } k \text{ bilangan bulat}\}$.
8. Misalkan $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ adalah dua bilangan kompleks maka diperoleh
   - $Arg(z_1 \times z_2) = \{Arg(z_1) + Arg(z_2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   - $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{Arg(z_1) - Arg(z_2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Uji Pemahaman

Benar atau Salah. Berdasarkan sifat-sifat bilangan kompleks yang telah kalian ketahui, tentukan apakah pernyataan pada nomor 1 – 4 benar atau salah. Misalkan diberikan bilangan kompleks $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = 2$.

1. $z_3 + z_4 = z_1$
2. $\overline{z_1} = z_2$
3. $z_1 \times z_2 = z_1 + z_2$
4. $z_1 \times z_2 = z_3^2$

Menulis Bilangan kompleks. Diberikan bilangan kompleks dalam bentuk pasangan terurut (a,b) nomor 5–6 . **(a)** Nyatakan bilangan kompleks berikut ini dalam bentuk kartesius, **(b)** Tulis bentuk bilangan kompleks berikut ini dalam bentuk polar.

5. (4, –3)
6. (–2, –2)

Menggambar bilangan kompleks pada bidang kompleks. Diberikan bilangan kompleks dalam bentuk pasangan terurut (a,b) nomor 7–8. Gambarlah bilangan kompleks berikut ini pada bidang kompleks.

7. (3, 1)
8. (–3, 2)

Operasi-Operasi Bilangan Kompleks. Diberikan bilangan kompleks $z_1 = 4 - 3i$ $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = 3 + i$, $z_4 = -3 + 2i$. Hitunglah!

9. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$
10. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_4} + \frac{z_4}{z_1}$

11. $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_3^2 + z_4^2}$

12. **Kesamaan Dua Bilangan Kompleks.** Tentukan bilangan real x dan y yang memenuhi $(4-3i)x^2 + (3+2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)i$!

13. Tentukan solusi dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x + 6 = 0$!

14. Tentukan persamaan kuadrat yang mempunyai solusi $x_1 = i$ dan $x_2 = \dfrac{1}{1+i}$!

Konjugat, Modulus dan Argumen Bilangan Kompleks. Tentukan konjugat, modulus, dan argumen dari bilangan kompleks nomor 15 – 16.

15. (4, −3)

16. (−2, −2)

Penerapan

17. Diberikan bentuk persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$. Tentukan solusi secara umum dari persamaan kuadrat tersebut untuk sembarang $a \neq 0$ dan b,c adalah bilangan real.

18. Diberikan sebuah fungsi gelombang radial dari hidrogen untuk orbital $2p$ dalam bentuk $\psi_{2p} = \mp \sin\theta e^{\pm i\phi} f(r)$ Nyatakan bentuk fungsi gelombang radial tersebut dalam bentuk polar.

Penalaran

19. Tentukan hasil penjumlahan dari $i^{2021} + i^{2020} + i^{2019} + \cdots + i + 1$.

20. Diberikan bilangan kompleks z_1 dan z_2 dengan $|z_1| = |z_2| = 1$ dan $z_1 z_2 \neq 1$, periksa apakah bentuk $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ memuat bagian imajiner yang tak nol.

Berbeda Tetapi Tetap Sama

Kalian telah mempelajari tentang berbagai bentuk dari bilangan kompleks. Ada bentuk kartesius, ada bentuk polar, dan ada bentuk eksponen. Terpikirkah oleh kalian, mengapa bilangan kompleks perlu dinyatakan

dalam berbagai bentuk? Mengapa tidak satu bentuk saja yang dikenal, yakni bentuk kartesius? Dari ketiga bentuk tersebut adakah bentuk yang paling baik?

Pada proyek ini kita akan mencoba menerapkan bentuk-bentuk bilangan kompleks dalam perhitungan. Berikan pendapatmu dengan tentang kelebihan dan kekurangan dari setiap bentuk kartesius, polar, dan eksponen dari bilangan kompleks. Langkah awal adalah membentuk tiga kelompok, kemudian lakukan langkah berikut.

Membuat permasalahan

1. Bentuklah tiga kelompok yakni kelompok bentuk Kartesius, kelompok Eksponen, dan kelompok bentuk Polar.
2. Setiap kelompok tuliskan beberapa bilangan kompleks sesuai bentuk dari kelompok masing-masing, sebagai contoh:

Kelompok	z_1	z_2	...	z_n
Kartesius	$(2-3i)$	$(4+5i)$	...	$(5-2i)$
Polar	$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$	$3(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$	...	$5(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$
Eksponen	$\sqrt{2}e^{i45}$	$3e^{i0}$	...	$5e^{i60}$

3. Setiap kelompok susunlah pertanyaan-pertanyaan dari petunjuk berikut.
   a). Ubahlah bilangan kompleks yang ada ke dalam bentuk sesuai nama kelompok?

   b). Interpretasikan bilangan kompleks yang diperoleh ke dalam bidang kompleks

   c). Tentukan bentuk hasil pangkat 2021 dari bilangan kompleks tersebut.

   d). Tentukan bagian real dan imajiner dari hasil perpangkatan 2021 dari bilangan kompleks tersebut.
4. Kemudian pertanyaan-pertanyaan serta bilangan kompleks yang sudah kalian susun kirimkan ke kelompok-kelompok lainnya.

Aturan permainan

1. Setiap anggota dalam kelompok masing-masing, berdiskusi menyelesaikan pertanyaan-pertanyaan yang diberikan dari kelompok lain.
2. Setiap kelompok membuat analisis apakah pertanyaan tersebut mudah diselesaikan dengan bentuk bilangan kompleks sesuai nama kelompok sendiri atau kelompok lain?
3. Jelaskan mengapa penyelesaian tersebut dirasakan mudah?
4. Buatlah suatu simpulan persoalan seperti apa yang mudah diselesaikan dalam bentuk bilangan kompleks sesuai kelompok masing-masing.
5. Lakukan pertukaran dari anggota setiap kelompok dengan membentuk kelompok baru yang terdiri dari satu perwakilan dari setiap kelompok awal.
6. Setiap anggota di kelompok baru menyampaikan hasil yang diperoleh dari diskusi kelompok awal.
7. Tuliskan simpulan dari proyek yang kalian buat.

Ingatlah kembali pengalaman belajar kalian di Bab 1 Bilangan Kompleks ini. Setelah itu, refleksikan pengalaman belajarmu tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut.

1. Sejauh mana manfaat yang dapat kalian rasakan setelah berdinamika di Bab 1 Bilangan Kompleks? Ceritakan manfaat yang dapat kalian rasakan.
2. Strategi-strategi belajar seperti apa yang kalian gunakan untuk belajar di Bab 1 Bilangan Kompleks? Apakah semua strateginya sudah membantu untuk belajar secara optimal?
3. Sekarang, nilailah pembelajaran kalian sendiri di Bab 1 Bilangan Kompleks ini dengan mencentang kolom-kolom yang sesuai pada tabel berikut.

No.	Target Pembelajaran	🙂	😐	🙁
Subbab A Bilangan Kompleks				
1.	Saya dapat memahami pengertian bilangan kompleks			
2.	Saya dapat menyatakan bilangan kompleks pada bidang kompleks			
3.	Saya dapat menentukan bentuk-bentuk bilangan kompleks			
4.	Saya dapat memanfaatkan bilangan kompleks dalam menyelesaikan persamaan			
Subbab B Operasi pada Bilangan Kompleks				
5.	Saya dapat menjumlahkan dua bilangan kompleks			
6.	Saya dapat melakukan perkalian bilangan kompleks dengan skalar			
7.	Saya dapat melakukan perkalian dua bilangan kompleks			
8.	Saya dalam memahami sifat-sifat pada operasi bilangan kompleks			
Subbab C Konjugat, Modulus dan Argumen Bilangan Kompleks				
9.	Saya dapat menentukan konjugat bilangan kompleks			
10.	Saya dapat memahami sifat-sifat konjugat bilangan kompleks			
11.	Saya dapat menentukan modulus bilangan kompleks			
12.	Saya dapat memahami sifat-sifat modulus bilangan kompleks			
13.	Saya menentukan Argumen bilangan kompleks			
14.	Saya dapat memahami sifat-sifat Argumen bilangan kompleks			

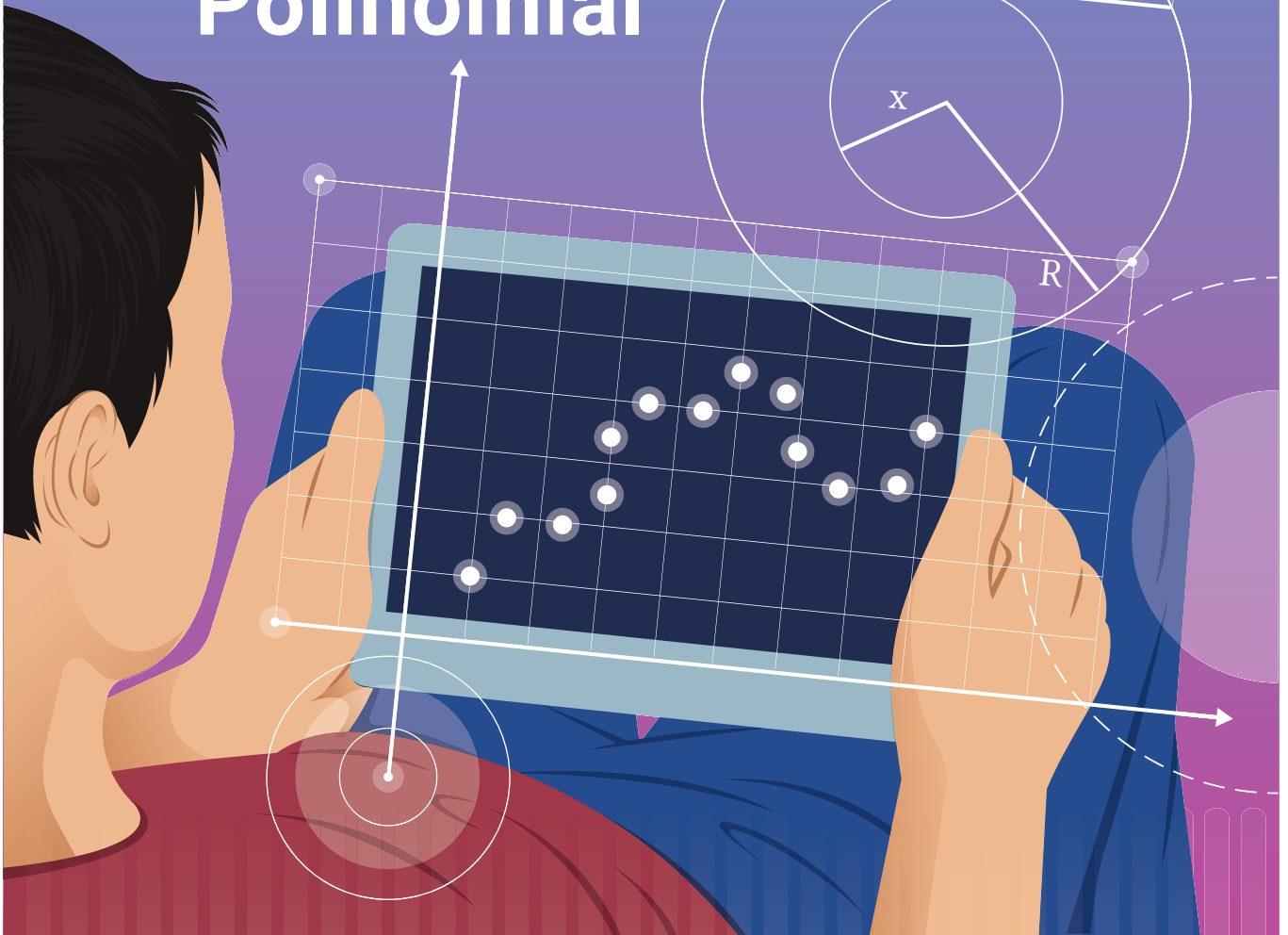
Kalian telah mempelajari bilangan kompleks pada buku ini. Untuk memperkaya atau memperdalam pengetahuan dan keterampilan,kalian dapat mempelajari bilangan kompleks dari referensi berikut ini.

- Buku Fungsi Variabel Kompleks, Encum Sumiaty, M.Si dan Endang Dedy, M.Si., Bumi Aksara, 2020. Pada buku tersebut menjelaskan tentang akar pangkat *n* dari bilangan kompleks, fungsi kompleks dan transformasi elementar pada fungsi kompleks.
- https://books.google.co.id/books?id=_eNVDwAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=id&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false laman ini menjelaskan buku bilangan kompleks karya Wuryansari Muharini Kusumawinahyu.

- https://www.youtube.com/wpenofficial-. Channel youtube menjelaskan tentang sifat-sifat pada operasi bilangan kompleks.

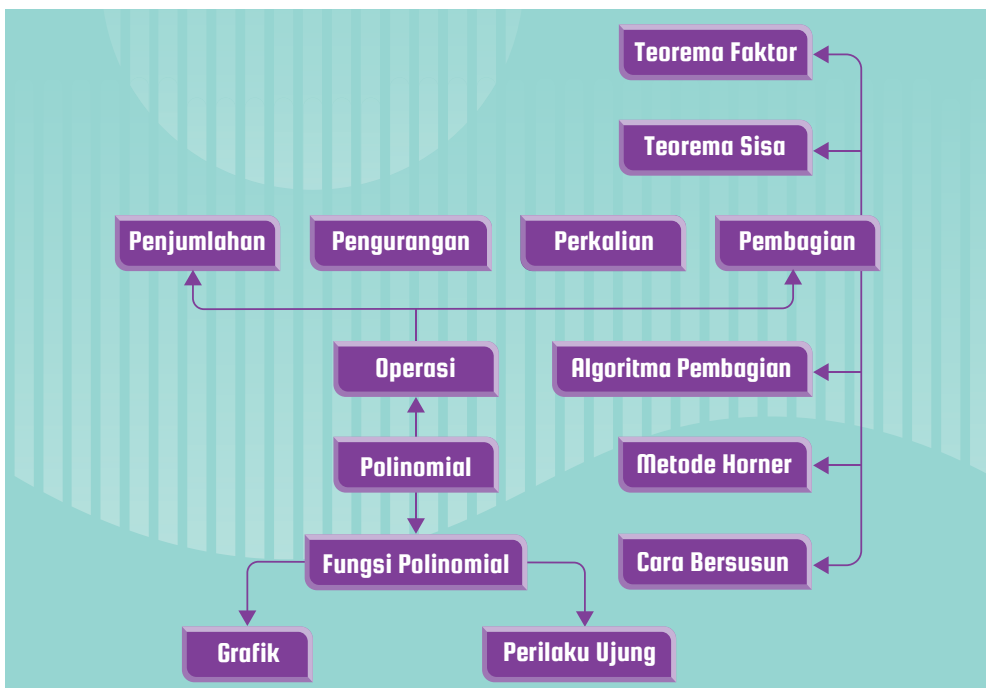
KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA, 2021
Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-770-2

Bab 2

Polinomial

Salah satu tantangan utama para kreator konten digital, misalnya YouTuber, adalah untuk selalu kreatif membuat konten-konten yang hebat. Bagaimana fungsi polinomial dapat membantu para kreator konten digital untuk mencapai tujuan tersebut?

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut.

- Menjelaskan definisi polinomial dan fungsi polinomial serta mengidentifikasi karakteristiknya.
- Melakukan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian terhadap polinomial.
- Melakukan pembagian polinomial dan menggunakan Teorema Sisa.
- Melakukan pemfaktoran polinomial dan menentukan pembuat nol real dan kompleks dari polinomial.
- Membuktikan identitas polinomial dan menggunakan identitas polinomial untuk melakukan pemfaktoran polinomial.

Kata Kunci	Polinomial, Operasi pada Polinomial, Algoritma Pembagian, Teorema Sisa, Teorema Faktor, Metode Horner, Fungsi Polinomial, Grafik Fungsi Polinomial, Perilaku Ujung.

Menjelajah Banyak Hal dengan Polinomial

Gambar 2.1 Kreator Konten

Apakah kalian seorang kreator konten digital? Atau kalian bercita-cita menjadi seorang kreator konten digital yang handal? Bab ini akan membahas topik-topik yang dapat kalian gunakan untuk menganalisis perilaku pengguna konten digital agar konten-konten tersebut betul-betul tepat sasaran. Penjelasannya dapat kalian temukan di bagian Matematika dan Sains pada halaman 68. Selain itu, polinomial yang kalian pelajari di dalam bab ini juga akan mengajak kalian menjelajah banyak hal. Di bagian Matematika dalam Budaya pada halaman 92, kalian akan mengetahui bagaimana fungsi polinomial dapat dimanfaatkan untuk memodelkan banyaknya pengunjung Candi Borobudur dari waktu ke waktu. Di dalam Proyek pada halaman 117, kalian akan diajak untuk mengikuti acara lelang secara cerdas. Untuk itu, persiapkan diri kalian untuk belajar polinomial dengan penuh semangat!

A. Polinomial dan Fungsi Polinomial

Pada subbab ini kalian akan mempelajari polinomial dan fungsi polinomial. Kalian juga akan diajak untuk menganalisis suatu polinomial dengan mengidentifikasi derajat dari polinomial tersebut.

1. Pengertian Polinomial

Sebelum kalian melihat definisi formal dari polinomial, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut untuk mengenal penyusun dari polinomial, yaitu monomial.

Mengenal Monomial

Di jenjang sekolah menengah pertama kalian telah belajar tentang bentuk-bentuk aljabar. Pada aktivitas ini, kalian akan menggunakan pengetahuan mengenai bentuk-bentuk aljabar tersebut untuk mengidentifikasi karakteristik monomial. Untuk mengeksplorasi, kerjakan tugas berikut!

1. Kelompokkan bentuk-bentuk aljabar berikut menjadi dua bagian.

   $\sqrt[3]{p}$, $2x^2y$, -8, $\frac{2}{m}$, $1{,}24k^4$, dan $5a^{-6}$

   Setelah selesai mengelompokkannya, jelaskan alasan kalian dalam mengelompokkan bentuk-bentuk tersebut.

2. Salah satu cara untuk mengelompokkan bentuk-bentuk aljabar pada bagian 1 adalah sebagai berikut.

   Kelompok 1: $2x^2y$, -8, dan $1{,}24k^4$

   Kelompok 2: $\sqrt[3]{p}$, $\frac{2}{m}$ dan $5a^{-6}$

   Menurut kalian, pengelompokkan tersebut didasarkan pada apa?

3. Pada bagian 2, bentuk-bentuk aljabar pada kelompok pertama disebut dengan monomial, sedangkan bentuk-bentuk aljabar pada kelompok kedua bukanlah monomial. Jika demikian, menurut kalian, apa yang dimaksud dengan monomial?

Monomial adalah suatu bilangan, suatu variabel berpangkat bilangan cacah, atau perkalian antara bilangan dan satu atau lebih variabel-variabel berpangkat bilangan cacah. **Konstanta** merupakan monomial yang tidak memuat variabel, misalnya -8 dan 25. Faktor numerik dari suatu monomial disebut dengan **koefisien**.

Monomial merupakan salah satu jenis polinomial. Seperti pada bilangan real, jika kita menjumlahkan dua bilangan real akan menghasilkan bilangan

real. Penjumlahan dari dua atau lebih monomial juga merupakan polinomial. Untuk lebih jelasnya, perhatikan definisi polinomial berikut.

Definisi 2.1

Definisi Polinomial

Polinomial adalah bentuk aljabar yang berupa monomial atau penjumlahan dari dua atau lebih monomial.

Untuk lebih memahami polinomial, perhatikan Contoh 2.1 berikut ini.

Contoh 2.1

Mengidentifikasi Polinomial

Tentukan apakah setiap bentuk aljabar berikut merupakan polinomial atau bukan?

a). $4x^3y - 3x^2$

b). $x + 2\sqrt{x}$

c). $2x^3 - 5x^{-2} + 1$

Alternatif Penyelesaian

a). Polinomial karena setiap sukunya, yaitu $4x^3y$ dan $-3x^2$, merupakan monomial.

b). Bukan polinomial karena $2\sqrt{x}$ bukan merupakan monomial. Bentuk $2\sqrt{x}$ memuat variabel yang diakarkuadratkan sehingga pangkat dari variabel tersebut bukan bilangan cacah.

c). Bukan polinomial karena $-5x^{-2}$ bukan merupakan monomial. Bentuk $-5x^{-2}$ memiliki variabel yang pangkatnya bukan bilangan cacah.

Apakah $\frac{2x}{y^2} + xy^2$, $4 - x - 2x^4$, dan $3xy^4 + 5x^3y^2 - 7x$ merupakan polinomial? Jelaskan alasannya!

Bentuk aljabar dalam Contoh 2.1 pada bagian (a) dapat dipandang sebagai *pengurangan* monomial, yaitu $4x^3y$ dikurangi dengan $3x^2$. Padahal, di dalam definisi polinomial diterangkan bahwa polinomial merupakan *penjumlahan* dari monomial. Bagaimana pendapat kalian mengenai hal tersebut?

2. Derajat Suatu Polinomial

Salah satu karakteristik dari polinomial adalah derajatnya. Untuk mengetahui derajat dari suatu polinomial, ikuti aktivitas eksplorasi berikut ini.

Mengetahui Derajat Suatu Polinomial

Di dalam aktivitas ini, kalian diajak untuk memahami derajat dari suatu monomial dan polinomial. Jika telah mengetahui bagaimana menentukan derajat dari suatu monomial, kalian dengan mudah dapat mengidentifikasi derajat dari suatu polinomial.

1. Berikut ini adalah pasangan monomial dan derajatnya.

Monomial	Derajat
$4x^5$	5
$\frac{3}{4}x^2y^7$	9
$0{,}12x$	1
$2{,}17x^3yz^3$	7

Dari contoh-contoh tersebut, menurut kalian, bagaimana cara menentukan derajat suatu monomial?

2. Perhatikan pasangan polinomial dan derajatnya berikut ini.

Polinomial	Derajat
$2x^3$	3
$x-5$	1
$5x^4y^2+xy^2-2x^5y^6$	11
$0{,}13x^3+1{,}56x^2-2{,}24x+1{,}72$	3

3. Berdasarkan informasi pada tabel tersebut, bagaimana cara menentukan derajat suatu polinomial?

Pada aktivitas eksplorasi sebelumnya kalian telah menemukan cara bagaimana menentukan derajat suatu monomial. Untuk menegaskan kembali apa yang telah kalian ketahui mengenai derajat monomial, perhatikan definisi berikut.

Definisi 2.2

Derajat Monomial

Jika a adalah koefisien yang tak nol, derajat monomial ax^n adalah n.

Derajat suatu monomial yang terdiri dari beberapa variabel adalah jumlah dari eksponen semua variabel tersebut.

Setiap suku dari polinomial merupakan monomial. Oleh karena itu, penentuan derajat suatu polinomial tergantung dari monomial-monomial yang menjadi suku dari polinomial tersebut.

Definisi 2.3

Derajat Polinomial

Derajat suatu polinomial adalah derajat dari sukunya yang berderajat tertinggi.

Untuk lebih memahami derajat polinomial, cermati Contoh 2.2 berikut ini.

Contoh 2.2

Menentukan Derajat Polinomial

Tentukan derajat dari polinomial $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$.

Alternatif Penyelesaian

Derajat dari $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ sama dengan derajat sukunya yang paling tinggi. Derajat suku-suku polinomial tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

Derajat: 3 | Derajat: 1

$$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Derajat: 2 | Derajat: 0

Dengan demikian, derajat tertinggi sukunya adalah 3. Hasilnya derajat polinomial tersebut adalah 3.

Tentukan derajat dari $13{,}13x^2y^3z^4 - 8{,}98xy^4z^5 + 10{,}18$.

■

Mari Mengomunikasikan

Rahma menganggap bahwa derajat dari 0 adalah 0. Dia beralasan bahwa 0 merupakan konstanta dan dapat dituliskan kembali menjadi $0x^0$. Apakah kalian setuju dengan Rahma? Mengapa demikian?

Mari Berpikir Kreatif

Tanpa melakukan penjabaran secara utuh, carilah cara untuk menentukan derajat dari polinomial $(6x^5 - 5)^2(2x^2 + 7)^3$. Selanjutnya, gunakan cara tersebut untuk menentukan derajat setiap polinomial berikut!

a). $(x^2 - 1)^{15}(x^5 + 3)^{10}$

b). $(4 - 16x^4)^2(3 - x^2)^3(1 + x)^4$

4. Fungsi Polinomial dan Grafiknya

Bentuk polinomial dapat digunakan untuk mendefinisikan suatu fungsi. Untuk mengetahui hal tersebut, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut ini.

Pertandingan dalam Liga

Di dalam dunia olahraga, liga biasanya dipilih sebagai format kompetisi antartim. Dengan format seperti itu, setiap tim akan bertanding dengan semua tim lainnya. Selain itu, pada kebanyakan liga, setiap dua tim akan bertanding dua kali, kandang dan tandang. Sebagai contoh sederhana, misalnya sebuah liga terdiri dari tiga tim, yaitu A, B, dan C. Total banyaknya pertandingan dalam liga tersebut adalah 6. Pertandingan-pertandingan tersebut adalah A melawan B, A melawan C, B melawan A, B melawan C, C melawan A, dan C melawan B. Tim yang disebut pertama dalam pertandingan tersebut bertindak sebagai tuan rumah (kandang).

Di dalam eksplorasi ini, kalian akan diajak untuk menemukan total banyaknya pertandingan dalam sebuah liga yang menggunakan format kandang-tandang. Perhatikan soal berikut ini.

1. Jika dalam liga terdapat 4 tim, berapa total banyaknya pertandingan? Bagaimana jika dalam liga tersebut terdapat 5, 10, atau 20 tim?
2. Buatlah sebuah rumus untuk menentukan banyaknya total pertandingan dalam sebuah liga jika terdapat x tim!
3. Rumus yang kalian temukan dalam bagian ketiga dapat dinyatakan ke dalam fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, dan c adalah bilangan real. Tentukan nilai a, b, dan c tersebut!
4. Fungsi yang kalian temukan pada bagian 3 merupakan salah satu contoh polinomial. Dari keterangan tersebut, cobalah untuk menduga apa yang dimaksud dengan fungsi polinomial?

Aktivitas eksplorasi yang telah kalian lakukan tersebut menghasilkan salah satu jenis fungsi polinomial, yaitu fungsi kuadrat. Selain fungsi kuadrat, fungsi-fungsi yang masuk ke dalam kategori fungsi polinomial masih banyak lagi. Salah satunya adalah fungsi linear. Fungsi linear ini sudah kalian pelajari di sekolah menengah pertama.

Untuk mengetahui pengertian fungsi polinomial secara lebih jelas, perhatikan definisi berikut ini.

Definisi 2.3

Fungsi Polinomial

Fungsi polinomial dalam variabel x adalah fungsi yang memiliki bentuk umum

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dengan koefisien-koefisiennya, yaitu a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, dan a_0, adalah bilangan-bilangan real, $a_n \neq 0$, dan n adalah bilangan cacah.

Serupa dengan bentuk polinomial, fungsi polinomial juga memiliki derajat. Derajat dari fungsi polinomial yang disebutkan dalam definisi tersebut adalah n. Suku dari fungsi polinomial yang memiliki derajat tertinggi disebut dengan **suku utama**. Koefisien dari suku utama tersebut dinamakan **koefisien utama**.

Karakteristik dari suatu fungsi dapat dilihat dari grafiknya. Demikian juga dengan fungsi polinomial. Perhatikan Contoh 2.3 berikut untuk mengetahui bagaimana menggambar grafik fungsi polinomial.

Contoh 2.3

Menggambar Grafik Fungsi Polinomial

Gambarlah grafik dari setiap fungsi berikut.

a). $f(x) = 2x + 5$

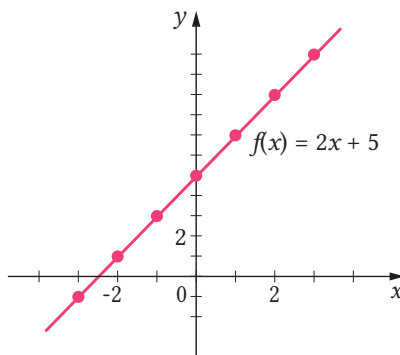
b). $g(x) = x^2 - 2x - 3$

c). $h(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Alternatif Penyelesaian

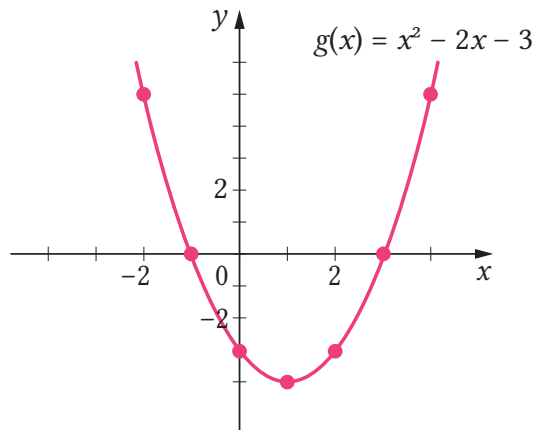
a). Grafik fungsi f dapat digambar dengan terlebih dahulu menentukan beberapa nilai fungsinya kemudian menuliskannya ke dalam tabel beserta dengan pasangan-pasangan berurutan yang diperoleh.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-1	1	3	5	7	9	11
(x, y)	$(-3, -1)$	$(-2, 1)$	$(-1, 3)$	$(0, 5)$	$(1, 7)$	$(2, 9)$	$(3, 11)$

Untuk mendapatkan grafik f, gambar pasangan-pasangan berurutan (x,y) dan hubungkan dengan sebuah garis. Grafik fungsi f ditunjukkan pada Gambar 2.2 berikut.

Gambar 2.2 Grafik Fungsi $f(x) = 2x + 5$

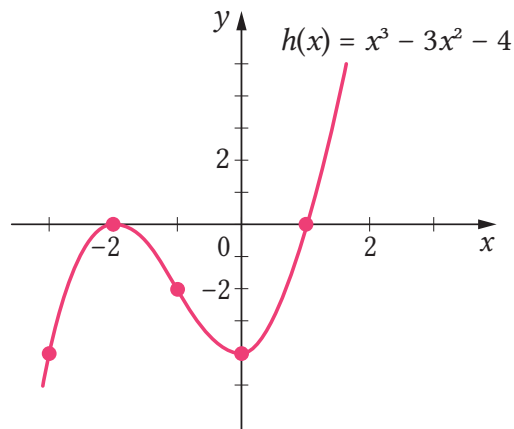
b). Pertama, buat tabel nilai fungsi g untuk beberapa nilai x. Dalam tabel tersebut tuliskan juga pasangan-pasangan berurutan (x, y) yang bersesuaian.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5
(x, y)	$(-2, 5)$	$(-1, 0)$	$(0, -3)$	$(1, -4)$	$(2, -3)$	$(3, 0)$	$(4, 5)$

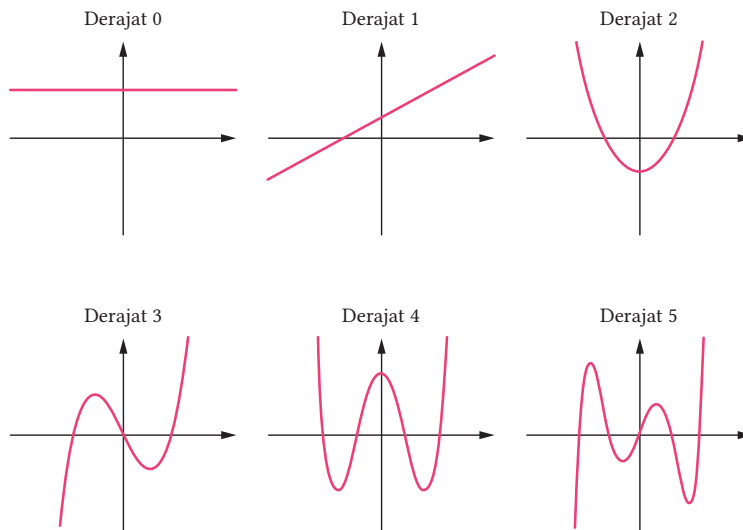
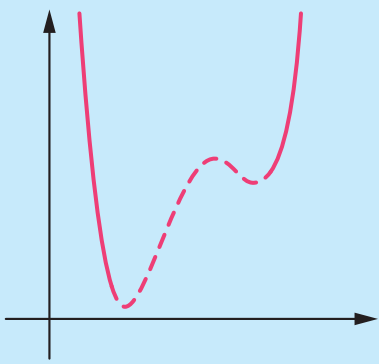
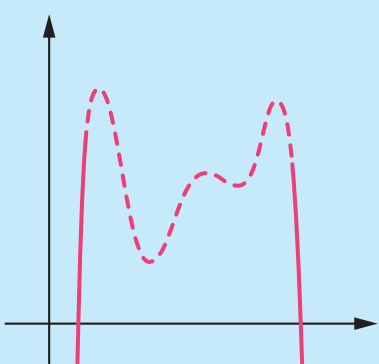
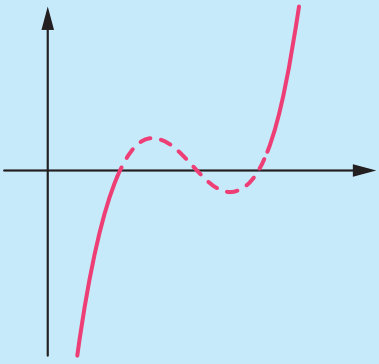
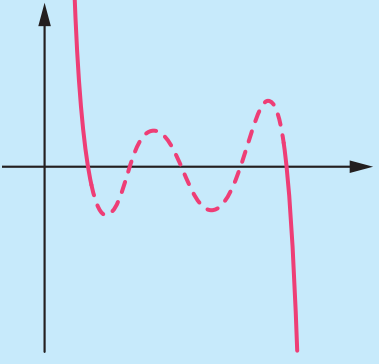
Selanjutnya, gambar tujuh pasangan berurutan (x, y) pada bidang koordinat dan hubungkan dengan kurva halus. Grafik fungsi g ditunjukkan pada Gambar 2.3.

Gambar 2.3 Grafik Fungsi $g(x) = x^2 - 2x - 3$

c). Grafik fungsi h dapat digambar dengan cara yang serupa, yaitu dengan terlebih dahulu membuat tabel nilai fungsi h untuk beberapa nilai x.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$y = h(x)$	−20	−4	0	−2	−4	0	16
(x, y)	(−4, −20)	(−3, −4)	(−2, 0)	(−1, −2)	(0, −4)	(1, 0)	(2, 16)

Selanjutnya, gambar titik-titik (x, y) pada bidang koordinat untuk kemudian dihubungkan dengan kurva halus. Grafik fungsi h ditunjukkan pada Gambar 2.4 berikut.

Gambar 2.4 Grafik Fungsi $h(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$.

Pada Contoh 2.3 kalian telah melihat tiga grafik fungsi polinomial. Bentuk umum grafik beberapa fungsi polinomial ditunjukkan pada Gambar 2.5. Grafik-grafik pada Gambar 2.5 tersebut dipilih yang memiliki titik potong dengan sumbu X banyaknya *maksimum*.

Gambar 2.5 Grafik Fungsi Polinomial Berderajat 0–5

Pikirkanlah apakah ada hubungan antara derajat polinomial dengan banyak maksimal grafik polinomial tersebut memotong sumbu X?

Salah satu karakteristik yang dapat diamati dari grafik fungsi polinomial adalah perilaku ujungnya. **Perilaku ujung** adalah perilaku dari suatu grafik ketika x mendekati tak hingga atau negatif tak hingga. Perilaku ujung dari grafik fungsi polinomial ditentukan oleh suku utamanya dan dideskripsikan sebagai berikut.

Sifat 2.1

Perilaku Ujung Grafik Fungsi Polinomial

Jika $a_n x^n$ dengan $n > 0$ adalah suku utama dari suatu polinomial, perilaku ujung dari grafiknya dapat dibagi menjadi empat kategori sebagai berikut.

n	$a_n > 0$	$a_n < 0$
Genap	Grafiknya mengarah ke kiri atas dan kanan atas (↖, ↗)	Grafiknya mengarah ke kiri bawah dan kanan bawah (↙, ↘)
Ganjil	Grafiknya mengarah ke kiri bawah dan kanan atas (↙, ↗).	Grafiknya mengarah ke kiri atas dan kanan bawah (↖, ↘).

Gambar 2.6 Perilaku Ujung Grafik Fungsi Polinomial

Perhatikan Contoh 2.4 berikut ini untuk lebih memahami penggunaan perilaku ujung grafik fungsi polinomial.

Contoh 2.4

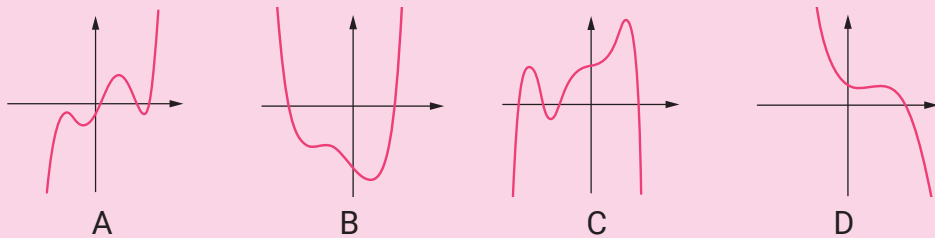
Menggunakan Perilaku Ujung Grafik Fungsi Polinomial

Dengan mengidentifikasi perilaku ujungnya, pasangkan masing-masing fungsi polinomial berikut dengan salah satu grafik A–D pada Gambar 2.7 yang paling sesuai.

a). $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 3$

b). $g(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$

c). $h(x) = -x^6 - \frac{11}{4}x^5 + x^4 + 5x^3 + 2$

d). $k(x) = 25x^5 - 20x^4 - 26x^3 + 12x^2 + 9x - 1$

Gambar 2.7 Grafik Fungsi-Fungsi Polinomial

Alternatif Penyelesaian

Untuk memasangkan fungsi polinomial dengan grafiknya, kita perlu mengidentifikasi derajat polinomial tersebut dan tanda koefisien utamanya.

	Suku Utama	Derajat	Tanda Koefisien Utama	Perilaku Ujung	Grafik
(a)	x^4	4, genap	Positif	$\nwarrow, \nearrow$	B
(b)	$-x^3$	3, ganjil	Negatif	$\nwarrow, \searrow$	D
(c)	$-x^6$	6, genap	Negatif	$\swarrow, \searrow$	C
(d)	$25x^5$	5, ganjil	Positif	$\swarrow, \nearrow$	A

Jelaskan perilaku ujung dari fungsi $f(x) = -2x^7 - 3x^3 + 1$.

Aktivitas Interaktif

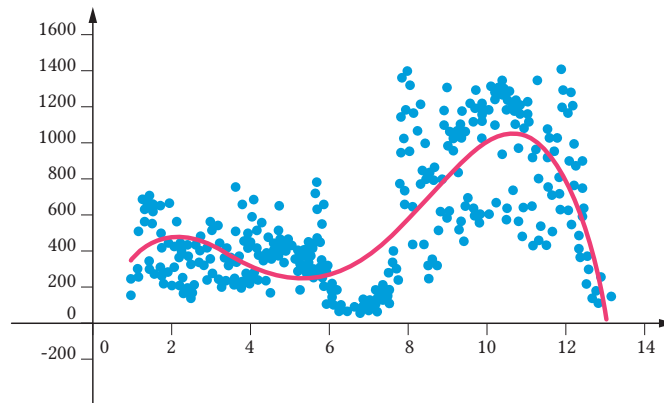
Untuk menyelidiki bagaimana perilaku ujung dari fungsi-fungsi polinomial, lakukan aktivitas interaktif berikut ini. Pindai kode batang atau buka tautan berikut!
https://www.desmos.com/calculator/u2ib1zgupc

Menjawab Tantangan Kreator Konten Digital

Gambar 2.8 Analitik Data

Banyak yang tertarik dan sukses menjadi kreator konten digital. Di balik kesuksesan yang diraih, tahukah kamu, apa tantangan utama seorang kreator konten digital? Tantangannya adalah kreatif membuat konten-konten yang hebat! Ini adalah pekerjaan berat. Fungsi polinomial yang kalian pelajari di bab ini dapat membantu para kreator konten digital untuk melakukannya.

Salah satu kriteria konten yang hebat adalah sesuai dengan sasarannya. Untuk itu, seorang kreator konten digital perlu mengenal penggunanya. Untuk YouTuber, mereka perlu mengenal siapa penontonnya dan bagaimana perilakunya. Bagaimana caranya? Salah satu caranya adalah dengan memodelkan berapa kali video-video di kanalnya dilihat oleh penontonnya.

Sebagai ilustrasi, Gambar 2.9 berikut menyajikan berapa kali video-video di suatu kanal YouTube ditonton setiap harinya pada tahun 2018. Sumbu X menyatakan bulan di tahun 2018 sedangkan sumbu Y merepresentasikan frekuensi video-videonya ditonton. Sebagai informasi, kanal tersebut mengunggah video-video pembelajaran matematika.

Gambar 2.9 Frekuensi Tampilan Video terhadap Waktu

Apa artinya? Berdasarkan model tersebut dan grafiknya di Gambar 2.9, kita dapat melihat bahwa kanal Youtube tersebut banyak ditonton pada saat bulan-bulan aktif sekolah dan berkurang penontonnya ketika liburan sekolah. Hal ini masuk akal karena kanal tersebut berisi video-video tentang pembelajaran matematika. Selain itu, frekuensi tampilan video di semester gasal secara umum lebih tinggi daripada di semester genap.

Berdasarkan grafik pada Gambar 2.9, apa yang dapat kalian sarankan kepada pemilik kanal agar dapat lebih berkembang? Video-video seperti apa yang perlu diunggah agar penontonnya meningkat di saat liburan sekolah? Apa yang perlu dilakukan agar penonton di semester genap meningkat? Contoh-contoh pertanyaan seperti inilah yang membuat kreator konten digital kreatif.

Polinomial dan Fungsi Polinomial

Kerjakan soal-soal latihan berikut dengan tepat!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau Salah.* Bentuk aljabar $6{,}24x^2 - 3{,}41x + 7{,}69$ merupakan suatu polinomial.

2. *Benar atau Salah.* Grafik fungsi polinomial $f(x)=2x^3-x+4$ melalui titik (−2, 18).

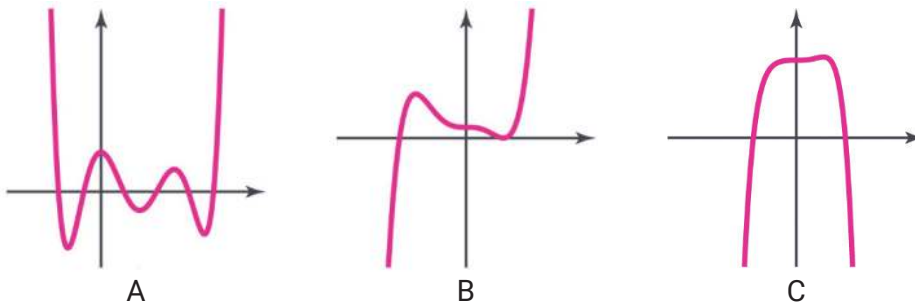
3. Fungsi polinomial $f(x)=-5x^7+2x^4-8$ perilaku ujungnya ___________.

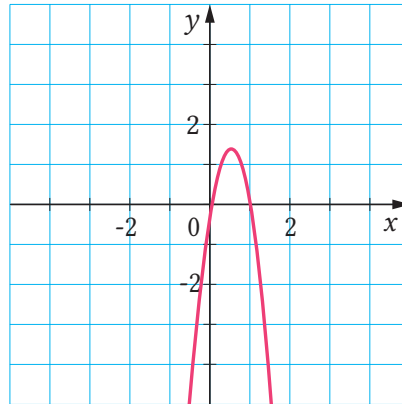
Penerapan Konsep

4. Tentukan apakah setiap bentuk aljabar berikut merupakan polinomial.
   a). $9-x+3x^2-4x^3$
   b). $4a^2b-9ab^2$
   c). $\frac{x}{y^2}-2x^2y$

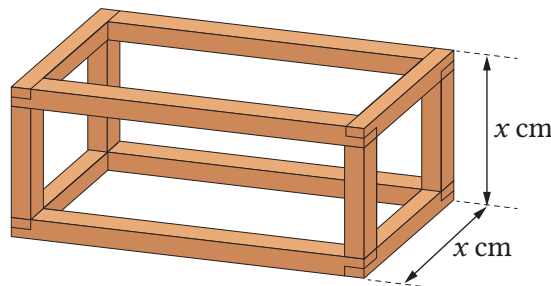
5. Cari derajat setiap polinomial berikut.
   a). $x^6-12x^4+3x^2-10$
   b). $12x^2y-5xy^2z+10$
   c). $\frac{1}{2}p^4-2pq+\frac{3}{4}q^3$

6. Gambarlah grafik setiap fungsi polinomial berikut.
   a). $f(x)=-3$
   b). $g(x)=1-4x+4x^2$
   c). $h(x)=x^3+2x^2+x+2$

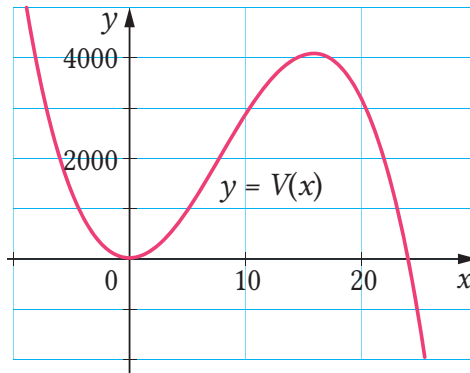
7. Dari tiga grafik berikut ini, tentukan grafik yang paling tepat untuk menjadi grafik dari fungsi polinomial $P(x)=-2x^6+x^3+3$. Jelaskan alasannya?

Gambar 2.10 Tiga Grafik Fungsi Polinomial

8. Galang menggambar grafik fungsi polinomial $f(x) = x^3 - 7x^2 + 6x$ dengan menggunakan kalkulator grafik. Hasil grafiknya diperlihatkan seperti pada gambar berikut ini.

Gambar 2.11 Tampilan Kalkulator Grafik

Galang menyadari bahwa perilaku ujung grafik pada gambar tersebut tidak sesuai dengan perilaku ujung grafik fungsi polinomial dengan derajat ganjil dan koefisien utama positif. Apa yang menyebabkan ketidaksesuaian tersebut? Jelaskan!

9. Kayu yang panjangnya 192 cm akan digunakan sebagai rangka untuk membuat sebuah kandang burung. Kandang tersebut berbentuk balok yang sepasang sisinya berbentuk persegi, perhatikan gambar berikut.

Gambar 2.12 Rangka Kandang Burung

a). Nyatakan volume V kandang tersebut sebagai fungsi terhadap x. (Abaikan ketebalan kayunya.)

b). Paulina menggambarkan grafik fungsi V yang ditemukan pada bagian (a) seperti berikut.

Gambar 2.13 Grafik V dari Paulina

Apakah grafik yang digambarkan oleh Paulina sesuai dengan daerah asal fungsi tersebut? Jika sudah sesuai, jelaskan alasannya. Jika tidak sesuai, bagaimana Paulina seharusnya menggambar grafik tersebut?

c). Berdasarkan grafik fungsi V, perkirakan volume maksimum dari kandang tersebut.

B. Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

Polinomial memiliki hubungan yang dekat dengan bilangan. Untuk melihatnya, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut ini.

Membandingkan Polinomial dan Bilangan

Melalui aktivitas ini, kalian akan diajak untuk membandingkan bilangan dan polinomial. Cermati bilangan dan polinomial yang bersesuaian di dalam tabel berikut untuk menemukan hubungannya. Gunakan hubungan yang telah kalian temukan untuk mengisi titik-titik pada tabel.

53	50 + 3	$5x + 3$
375	300 + 70 + 5	$3x^2 + 7x + 5$
2.298	2.000 + 200 + 90 + 8	$2x^3 + 2x^2 + 9x + 8$
6.311	6.000 + 300 + 10 + 1	...
17.742	...	...

Menurut kalian, apa kesamaan antara bilangan dan polinomial yang berada pada baris yang sama di dalam tabel tersebut? Apa perbedaannya?

Kalian telah menemukan kesamaan antara bilangan dan polinomial. Oleh karena itu, operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada polinomial dapat dilakukan dengan cara yang serupa seperti pada bilangan.

2. Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Bagaimana cara melakukan penjumlahan dan pengurangan polinomial? Untuk mengetahuinya, cermati aktivitas eksplorasi berikut.

Melakukan Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Melalui aktivitas eksplorasi ini kalian akan belajar untuk menemukan prosedur dalam melakukan penjumlahan dan pengurangan polinomial. Prosedur tersebut serupa dengan prosedur penjumlahan pada bilangan.

1. Salah satu cara melakukan penjumlahan dan pengurangan bilangan adalah dengan cara bersusun. Perhatikan contoh penjumlahan bersusun berikut ini.

$$\begin{array}{r} 2.735 \\ 6.241 \\ \hline 8.976 \end{array} +$$

$$\begin{array}{r} 9.465 \\ 2.334 \\ \hline 7.131 \end{array} -$$

   Jelaskan bagaimana cara melakukan penjumlahan dan pengurangan bersusun tersebut!

2. Dengan cara yang serupa, lengkapi penjumlahan dan pengurangan polinomial dengan cara bersusun berikut.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \\ 6x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} +$$

$$\begin{array}{r} 9x^3 + 4x^2 + 6x + 5 \\ 2x^3 + 3x^2 + 3x + 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} -$$

   Jelaskan cara penjumlahan dan pengurangan polinomial tersebut. Sifat operasi apa yang kalian gunakan?

3. Setelah menyelesaikan bagian 2, teman kalian menemukan cara yang berbeda. Berikut ini adalah caranya.

Penjumlahan Polinomial

$$(2x^3 + 7x^2 + 3x + 5) + (6x^3 + 2x^2 + 4x + 1)$$
$$= 2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 + 6x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$
$$= 2x^3 + 6x^3 + 7x^2 + 2x^2 + 3x + 4x + 5 + 1$$
$$= (2 + 6)x^3 + (7 + 2)x^2 + (3 + 4)x + (5 + 1)$$
$$= 8x^3 + 9x^2 + 7x + 6$$

Pengurangan Polinomial

$$(9x^3 + 4x^2 + 6x + 5) - (2x^3 + 3x^2 + 3x + 4)$$
$$= 9x^3 + 4x^2 + 6x + 5 - 2x^3 - 3x^2 - 3x - 4$$
$$= 9x^3 - 2x^3 + 4x^2 - 3x^2 + 6x - 3x + 5 - 4$$
$$= (9 - 2)x^3 + (4 - 3)x^2 + (6 - 3)x + (5 - 4)$$
$$= 7x^3 + x^2 + 3x + 1$$

Menurutnya cara tersebut pada dasarnya sama dengan cara yang dilakukan di bagian 2. Apakah kalian setuju? Jelaskan alasannya!

Dari eksplorasi tersebut kalian telah menemukan prosedur untuk melakukan penjumlahan dan pengurangan polinomial. Ketika melakukannya, kalian menjumlahkan dan mengurangkan suku-sukunya yang sejenis. **Suku-suku sejenis** adalah suku-suku yang memiliki variabel yang sama dan variabelnya tersebut juga memiliki eksponen yang sama.

Suku-Suku Sejenis	Bukan Suku-Suku Sejenis
$3x, -7x, -\frac{1}{5}x$	$11x, 4x^2, \frac{2}{3}x^4$
$\frac{1}{2}x^3, 4x^3, -2x^3$	$4x^3, -2x^4, -x^5$

Suku-Suku Sejenis	Bukan Suku-Suku Sejenis
$2x^2yz^3$, $\frac{3}{4}x^2yz^3$, $-5z^3yx^2$	$\frac{3}{4}x^2yz^3$, $2x^2y$, $-7xy^2z^3$

Untuk menjumlahkan dan mengurangkan suku-suku sejenis, gunakan sifat distributif. Perhatikan ilustrasi berikut ini.

$$2x^3 + 6x^3 = (2 + 6)x^3 = 8x^3$$

$$4x^2 - 7x^2 = (4 - 7)x^2 = -3x^2$$

Untuk lebih memahami penjumlahan dan pengurangan polinomial, perhatikan Contoh 2.5 berikut.

Contoh 2.5

Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Tentukan hasil dari $(2x^3 - 4x^2 + x - 11) + (5x^3 + x^2 - 3x - 9)$ dan $(x^4 - 3x^2 + 4x - 6) - (5x^3 + 2x^2 - x - 4)$.

Alternatif Penyelesaian

Hasil penjumlahan polinomial yang diberikan dapat ditentukan seperti berikut.

$$(2x^3 - 4x^2 + x - 11) + (5x^3 + x^2 - 3x - 9)$$

$= 2x^3 - 4x^2 + x - 11 + 5x^3 + x^2 - 3x - 9$ Hilangkan tanda kurung

$= 2x^3 + 5x^3 - 4x^2 + x^2 + x - 3x - 11 - 9$ Kelompokkan suku-suku sejenis

$= 7x^3 - 3x^2 - 2x - 20$ Sifat distributif.

Pengurangan polinomial yang diberikan dapat dilakukan seperti berikut.

$$(x^4 - 3x^2 + 4x - 6) - (5x^3 + 2x^2 - x - 4)$$

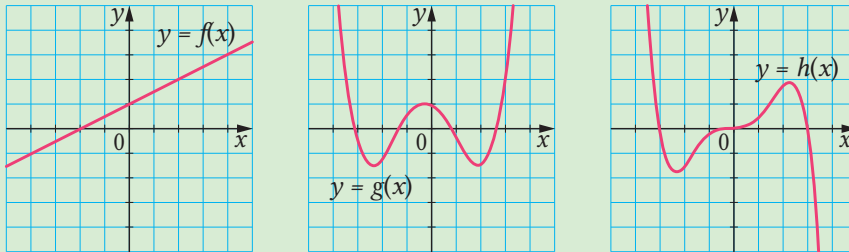
$= x^4 - 3x^2 + 4x - 6 - 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ Hilangkah tanda kurung

$= x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 4x + x - 6 + 4$ Kelompokkan suku-suku sejenis

$= x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ Sifat distributif

Jumlahkan $\left(2a^2b - 3ab^2 + 5\right) + \left(3a^2b + ab^2\right)$.

Mari Berpikir Kreatif

Berikut ini adalah grafik dari fungsi polinomial *f*, *g*, dan *h*.

Gambar 2.14 Grafik Fungsi f, g, dan h

a). Tanpa mencari persamaan fungsinya, tentukan bagaimana cara mensketsa grafik dari $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$. Jelaskan mengapa cara tersebut tepat!

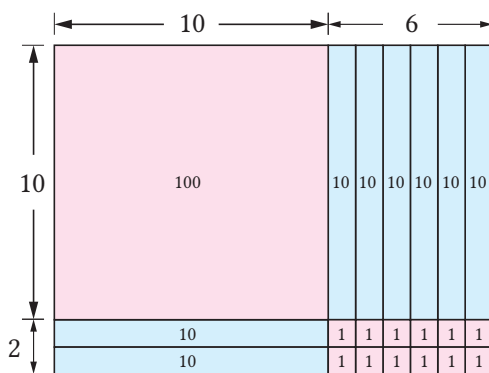
b). Berdasarkan cara di bagian (a), sketsalah juga grafik $f(x) + h(x)$, $g(x) + h(x)$, $f(x) - h(x)$, dan $g(x) - h(x)$.

2. Perkalian Polinomial

Seperti dua operasi sebelumnya, yaitu penjumlahan dan pengurangan, operasi perkalian pada polinomial dapat kita bangun melalui perkalian bilangan.

Mengalikan Dua Polinomial

Tujuan aktivitas ini adalah untuk memandu dalam menemukan strategi perkalian polinomial. Untuk melakukannya, terlebih dahulu kalian ingat kembali operasi perkalian pada bilangan.

1. Hasil kali dua bilangan dapat dimaknai sebagai luas daerah. Misalnya, 16 × 12 dapat diartikan sebagai luas daerah persegi panjang yang memiliki panjang 16 dan lebar 12. Karena 16 = 10 + 6 dan 12 = 10 + 2, maka perkalian kedua bilangan tersebut dapat dimodelkan sebagai luas daerah seperti berikut.

Gambar 2.15 Perkalian 16 × 12 sebagai Luas Daerah

a). Model luas daerah tersebut dapat disederhanakan menjadi tabel berikut ini. Mengapa demikian?

	10	6
10	100	60
2	20	12

b). Hitunglah 16 × 12 dengan cara perkalian bersusun. Apakah ada kesamaan antara perkalian bersusun tersebut dengan hasil pada tabel tersebut?

2. Dengan menggunakan tabel seperti pada bagian 1, tentukan hasil kali $(x + 6)(x + 2)$.

	x	6
x		
2		

3. Dengan cara seperti pada bagian 2, tentukan $(x-5)(x^2+3x-1)$.

4. Temanmu menyederhanakan perkalian di bagian 3 seperti berikut.

$$(x-5)(x^2+3x-1) = x^3+3x^2-x-5x^2-15x+5 = x^3-2x^2-16x+5$$

Tentukan kesamaan cara tersebut dengan cara yang ada di bagian 3.

5. Apakah cara temanmu di bagian 4 dapat ditulis dalam bentuk seperti berikut? Sifat apa yang digunakan untuk mengubah bentuk di ruas kiri persamaan menjadi bentuk yang di ruas kanan?

$$(x-5)(x^2+3x-1) = x(x^2+3x-1)-5(x^2+3x-1)$$

Sekarang kalian telah mengetahui bagaimana mengalikan dua polinomial. Sekarang perhatikan Contoh 2.6 berikut.

Contoh 2.6

Perkalian Polinomial

Tentukan hasil perkalian $(x^2 - 2x + 7)(2x - 5)$.

Alternatif Penyelesaian

Setiap suku $x^2 - 2x + 7$ dikalikan dengan $2x - 5$.

$(x^2 - 2x + 7)(2x - 5)$

$= x^2(2x - 5) - 2x(2x - 5) + 7(2x - 5)$ — Sifat distributif

$= 2x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 10x + 14x - 35$ — Sifat distributif

$= 2x^3 - 9x^2 + 24x - 35$ — Sederhanakan

Tentukan hasil dari $(4x^2 - x + 3)(x^2 - 1)$.

Mari Berpikir Kreatif

Dua bilangan dapat dikalikan dengan cara bersusun. Hal ini juga dapat dilakukan untuk polinomial satu variabel. Lakukan perkalian pada Contoh 2.6 dengan cara bersusun.

Latihan B

Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

Kerjakan soal-soal latihan berikut dengan tepat!

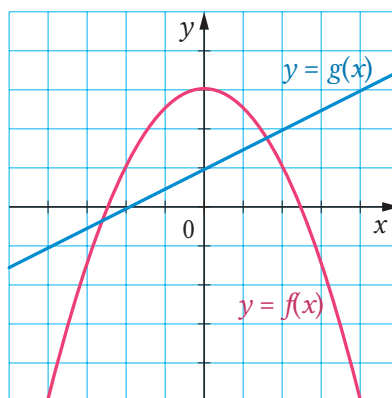
Pemahaman Konsep

1. Bentuk $2x^2 - 5x^2$ dapat diubah menjadi $(2 - 5)x^2$ dengan menggunakan sifat ___________.
2. *Benar atau Salah.* Polinomial pertama dikurangi polinomial kedua sama dengan negatif dari penjumlahan kedua polinomial tersebut.
3. *Benar atau Salah.* $(5x - 1) - (3x - 4) = 5x - 1 - 3x - 4$.

Penerapan Konsep

4. Sederhanakan penjumlahan dan pengurangan polinomial berikut ini.

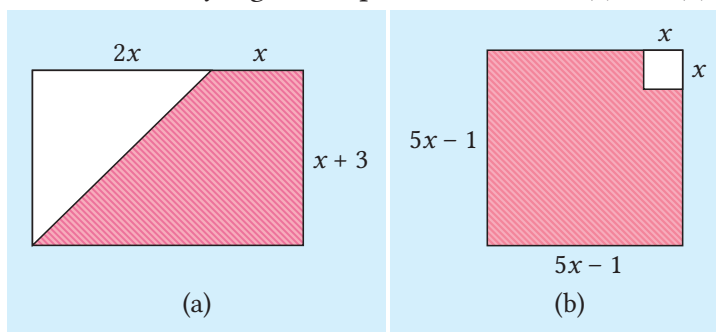
   a). $(3m^2n + mn - 12) + (2m^2n - mn^2 + 7)$

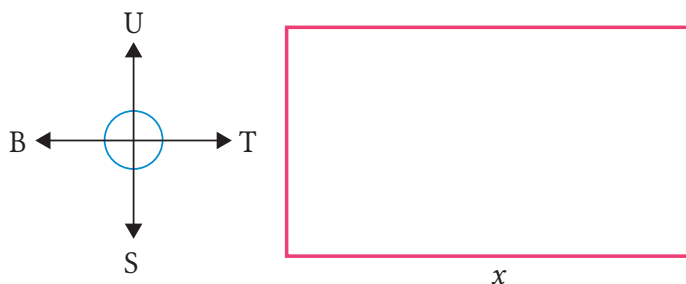
   b). $(2x^4 - x^3 + 4x - 12) - (x^4 + 2x^3 - x^2 - 6)$
5. Berikut ini adalah grafik dari fungsi polinomial f dan g. Berdasarkan grafik kedua fungsi tersebut, sketsalah grafik $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$.

Gambar 2.16 Grafik Fungsi f dan g

6. Tentukan hasil perkalian $(3a - b + 2)(a + 2b - 5)$.
7. Perhatikan persamaan berikut ini.

$$\left(x^{\square} - x + 1\right)\left(\square x - 1\right) = A\left(x\right)$$

Jika tanda kotak pada persamaan tersebut diganti dengan sembarang bilangan real, apakah $A(x)$ selalu merupakan polinomial? Mengapa?

8. Nyatakan luas daerah yang diarsir pada Gambar 2.17(a) dan (b) ke dalam x.

Gambar 2.17 Luas Daerah yang Diarsir

9. Pak Alex akan memagari tanahnya yang berbentuk persegi panjang dengan pagar plastik pembibitan, perhatikan gambar berikut! Karena adanya tiupan angin yang kencang, pagar yang mengarah ke arah timur-barat perlu dibuat lebih kuat. Menurut perhitungannya, biaya pemagaran ke arah timur-barat adalah sebesar Rp1.500,00 per meternya, sedangkan yang ke arah utara-selatan adalah Rp1.000,00.

Gambar 2.18 Tanah Pak Alex

Jika Pak Alex menyediakan anggaran Rp500.000,00 untuk keperluan pemagaran tersebut, nyatakan luas tanah yang dipagari sebagai fungsi L terhadap x!

C. Pembagian Polinomial

Pada subbab ini kalian akan mempelajari pembagian polinomial. Untuk itu, mari mengerjakan aktivitas eksplorasi berikut ini.

Membagi Bilangan

Sebelum mempelajari bagaimana melakukan pembagian pada polinomial, kalian akan diajak untuk mengamati pembagian pada bilangan. Cermati bentuk-bentuk pembagian berikut dan isilah titik-titik pada tabel sesuai dengan pola yang kalian temukan.

$\frac{7}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$\frac{13}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$13 = 5 \cdot 2 + 3$
$\frac{23}{6}$	$3\frac{5}{6}$	...
...	$4\frac{3}{8}$	...
$\frac{57}{10}$	...	...

Kegiatan eksplorasi yang telah kalian lakukan tersebut menunjukkan beberapa cara menuliskan pembagian bilangan. Misalnya, jika 7 dibagi dengan 4, mendapatkan hasil 1 dan sisa 3. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ atau } \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$$

Selain dengan cara demikian, kita juga dapat menuliskan

Pembagian pada polinomial serupa dengan pembagian bilangan. Pembagian pada polinomial tersebut dinyatakan dalam algoritma pembagian berikut.

Sifat 2.2

Algoritma Pembagian Polinomial

Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial, dengan $Q(x) \neq 0$, maka ada polinomial-polinomial $H(x)$ dan $S(x)$ yang masing-masing tunggal, dengan $S(x)$ adalah 0 atau polinomial berderajat kurang dari $Q(x)$, sedemikian sehingga

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \quad \text{atau} \quad P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$$

Polinomial $Q(x)$ disebut dengan **pembagi**, $H(x)$ adalah **hasil bagi**, dan $S(x)$ adalah **sisa**.

Algoritma pembagian polinomial tersebut dapat diilustrasikan oleh pembagian $x^3 + 4x^2 + 5x + 8$ dengan $x + 3$ sebagai berikut.

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 8}{x + 3} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x + 3}$$

atau

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x^2 + x + 2) + 2$$

Artinya, jika kita membagi $x^3 + 4x^2 + 5x + 8$ dengan $x + 3$, kita akan mendapatkan hasil bagi $x^2 + x + 2$ dan sisa 2. Pertanyaannya sekarang, bagaimana cara kita mengetahui bahwa hasil bagi dan sisanya seperti itu? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita dapat menggunakan pembagian bersusun.

Apakah memang benar $x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x^2 + x + 2) + 2$? Buktikan persamaan tersebut.

1. Pembagian Bersusun

Seperti pada penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial, kita dapat menemukan cara bagaimana membagi polinomial melalui pembagian bilangan.

Melakukan Pembagian Polinomial Bersusun

Di dalam aktivitas eksplorasi ini, kalian akan dipandu untuk menemukan cara bagaimana membagi polinomial dengan cara pembagian bersusun.

1. Sebagai bekal kalian di bagian selanjutnya, bagilah 297 dengan 14 dengan melengkapi pembagian bersusun berikut ini.

$$\begin{array}{r l} & 2\ldots \\ 14 \big) & \overline{297} \\ & \underline{28}\ - \\ & \ldots \\ & \underline{\ldots}\ - \end{array}$$

2. Pahami aturan pembagian bersusun yang dilakukan pada bilangan (sebelah kiri). Gunakan aturan tersebut untuk melengkapi pembagian bersusun pada polinomial yang bersesuaian (sebelah kanan).

$$\begin{array}{r l} & 112 \\ 13 \big) & \overline{1458} \\ & \underline{13}\ \ \ - \\ & \ 15 \\ & \underline{\ 13}\ \ - \\ & \ \ 28 \\ & \underline{\ \ 26}\ - \\ & \ \ \ 2 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r l} & x^2 \\ x + 3 \big) & \overline{x^3 + 4x^2 + 5x + 8} \\ & \underline{x^3 + 3x^2\qquad\qquad}\ - \\ & \qquad x^2 + 5x \end{array}$$

Kalian telah mengetahui bagaimana cara melakukan pembagian polinomial dengan cara bersusun. Perhatikan Contoh 2.7 berikut untuk melihat pembagian polinomial dengan kasus yang lain.

Contoh 2.7

Pembagian Polinomial Bersusun

Bagilah $4x^4 + 17x^3 - 3x + 1$ dengan $x^2 + 4x - 1$. Tuliskan hasilnya ke dalam bentuk-bentuk algoritma pembagian.

Alternatif Penyelesaian

Kita lakukan pembagian bersusun dengan terlebih dahulu menyisipkan suku $0x^2$ pada polinomial yang dibagi agar suku-sukunya lengkap.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 + x \\
x^2 + 4x - 1 & 4x^4 + 17x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \\
 & 4x^4 + 16x^3 - 4x^2 \quad - \qquad \text{Kalikan pembagi dengan } 4x^2 \\
 & \quad\; x^3 + 4x^2 - 3x \qquad\qquad \text{Kurangi} \\
 & \quad\; x^3 + 4x^2 - x \quad - \qquad \text{Kalikan pembagi dengan } x \\
 & \qquad\qquad -2x + 1 \qquad\qquad \text{Kurangi}
\end{array}
$$

Proses pembagian tersebut menyisakan polinomial $-2x + 1$ yang derajatnya kurang dari polinomial pembagi, yaitu $x^2 + 4x - 1$. Hasil pembagian ini dapat dituliskan menjadi seperti berikut.

$$\frac{4x^4 + 17x^3 - 3x + 1}{x^2 + 4x - 1} = 4x^2 + x + \frac{-2x + 1}{x^2 + 4x - 1}$$

Bentuk sebelumnya juga dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$4x^4 + 17x^3 - 3x + 1 = \left(x^2 + 4x - 1\right)\left(4x^2 + x\right) - 2x + 1$$

Carilah polinomial hasil bagi $H(x)$ dan polinomial sisa $S(x)$ setelah $P(x) = x^3 - x + 9$ dibagi dengan $Q(x) = x^2 - 2x + 3$. Nyatakan hasilnya ke dalam $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$.

Mari Berpikir Kreatif

a. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $(x^3 - 1) \div (x - 1)$. Ulangi untuk pembagian $(x^4 - 1) \div (x - 1)$.

b. Gunakan hasil pada bagian (a) untuk menduga hasil bagi dan sisa dari $(x^8 - 1) \div (x - 1)$.

c. Apa yang dapat kalian simpulkan? Buktikan!

2. Metode Horner

Selain dengan cara bersusun, kita dapat melakukan pembagian polinomial dengan cara yang lebih sederhana, yaitu dengan metode Horner. Akan tetapi, metode tersebut dapat digunakan jika pembaginya berbentuk $x - c$.

Membagi Polinomial dengan Metode Horner

Di dalam aktivitas eksplorasi ini, kalian akan dipandu untuk memahami metode Horner. Metode Horner dapat dikatakan sebagai bentuk penyederhanaan pembagian bersusun. Hal ini dikarenakan di dalam metode Horner, kita cukup menuliskan bagian-bagian yang penting saja. Bandingkan pembagian bersusun dan metode Horner berikut ini.

Pembagian Bersusun

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1x^2 + 2x - 3 \\
x - 2 & x^3 + 0x^2 - 7x + 8 \\
 & x^3 - 2x^2 \quad - \\
 & 2x^2 - 7x \\
 & 2x^2 - 4x \quad - \\
 & -3x + 8 \\
 & -3x + 6 \quad - \\
 & 2
\end{array}
$$

Metode Horner

2	1	0	−7	8
		2	4	−6 +
	1	2	−3	2

1. Pembagian polinomial dengan cara bersusun dan metode Horner memiliki beberapa kesamaan. Jelaskan kesamaan tersebut!
2. Pembagian bersusun dan metode Horner juga memiliki perbedaan. Sebutkan perbedaan tersebut.
3. Berdasarkan pengamatan kalian dalam membandingkan cara bersusun dan metode Horner, jelaskan langkah-langkah melakukan pembagian polinomial dengan metode Horner.

Setelah mengetahui bagaimana melakukan metode Horner, perhatikan Contoh 2.8 berikut ini.

Contoh 2.8

Menggunakan Metode Horner

Gunakan metode Horner untuk membagi $2x^3 + 5x^2 + 6$ dengan $x + 3$.

Alternatif Penyelesaian

Langkah pertama, tuliskan koefisien-koefisien dan konstanta polinomial yang dibagi, yaitu 2 (koefisien x^3), 5 (koefisien x^2), 0 (koefisien x), dan 6 (konstanta). Penulisan koefisien dan konstanta ini harus urut dari suku berderajat tertinggi sampai terendah. Di dalam metode Horner, jika polinomial pembaginya $x - c$, kita tuliskan c sebagai penggantinya. Karena $x + 3 = x - (-3)$, maka kita ganti pembaginya menjadi -3.

Selanjutnya kita gunakan metode Horner dengan menjumlahkan bilangan-bilangan dalam satu kolom, kemudian mengalikan hasilnya dengan -3 dan meletakkan hasil kalinya ke kanan-atas.

Panah ke bawah : Jumlahkan
Panah ke kanan-atas : Kalikan dengan -3

Dari pembagian tersebut, kita mendapatkan hasil bagi $2x^2 - x + 3$ dan sisa -3. Dengan demikian, kita dapat menuliskannya menjadi seperti berikut.

$$2x^3 + 5x^2 + 6 = (x + 3)(2x^2 - x + 3) - 3$$

Tentukan hasil bagi dan sisa dari pembagian $x^4 + 4$ oleh $x - 1$ dengan menggunakan metode Horner.

Kalian sudah dapat melakukan pembagian polinomial dengan menggunakan metode Horner. Akan tetapi, metode yang telah dipelajari tersebut mempersyaratkan bahwa pembaginya dalam bentuk $x - c$. Di permasalahan ini, kalian dan teman kalian akan diminta untuk menggunakan metode Horner ketika pembaginya tidak hanya berbentuk $x - c$.

Berkelompoklah dengan satu teman dan bagilah tugas agar masing-masing mengerjakan salah satu permasalahan berikut ini.

1. Gunakan metode Horner untuk membagi $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ dengan $2x - 1$. Untuk melakukannya, ikuti langkah-langkah berikut.

   a). Jadikan pembaginya menjadi bentuk $a(x - c)$. Berapakah nilai a dan c?

   b). Gunakan metode Horner untuk membagi $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ dengan $x - c$. Nyatakan hasilnya ke dalam bentuk berikut ini.

   $$2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = (x - c) \cdot H_1(x) + S(x)$$

   c). Gunakan manipulasi aljabar pada algoritma pembagian sedemikian sehingga kalian akan mendapatkan bentuk berikut.

   $$2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = (2x - 1) \cdot H(x) + S(x)$$

   Dari bentuk terakhir tersebut, tentukan hasil bagi dan sisanya.

2. Gunakan metode Horner untuk membagi $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dengan $(x - 1)(x - 3)$. Gunakan panduan berikut ini.

   a). Dengan metode Horner, bagilah $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dengan $(x - 1)$ dan nyatakan hasilnya ke dalam bentuk berikut.

   $$x^4 - 10x^2 - 5x + 10 = (x - 1) \cdot H_1(x) + S_1(x)$$

   b). Gunakan metode Horner untuk membagi $H_1(x)$ dengan $(x - 3)$. Tuliskan hasilnya ke dalam bentuk berikut.

   $$H_1(x) = (x - 3) \cdot H_2(x) + S_2(x)$$

   c). Substitusikan persamaan pada bagian (b) ke persamaan pada bagian (a) untuk mendapatkan bentuk seperti ini.

   $$x^4 - 10x^2 - 5x + 10 = (x - 1)(x - 3) \cdot H(x) + S(x)$$

   Dari persamaan tersebut, tentukan hasil bagi dan sisanya.

Setelah menyelesaikan permasalahan tersebut, bagikan apa yang telah kalian pelajari kepada teman kalian.

3. Teorema Sisa

Apakah pembagian polinomial hanya dapat digunakan untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian? Untuk menjawab pertanyaan ini, pelajari aktivitas eksplorasi berikut.

Membagi Polinomial dan Menentukan Nilai Fungsi Polinomial

Di dalam aktivitas ini kalian akan menyelidiki apakah ada hubungan antara pembagian polinomial dan penentuan nilai fungsi polinomial.

1. Misalkan polinomial $P(x)$ dibagi dengan suatu polinomial pembagi yang berbentuk $x - c$. Lengkapi tabel berikut dengan sisa pembagiannya dan nilai $P(c)$.

$P(x)$	Pembagi	Sisa	$P(c)$
$P(x) = x^2 + 4x - 16$	$x - 3$	...	P(3) = ...
$P(x) = x^2 - 2x - 14$	$x - 1$	...	P(1) = ...
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 11$	$x + 2$	...	P(−2) = ...
$P(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$	$x + 7$	...	P(−7) = ...
$P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 10$	x	...	P(0) = ...

2. Amati kembali tabel yang telah kalian lengkapi di bagian 1. Setelah itu, buatlah dugaan berdasarkan pengamatan tersebut.

3. Berdasarkan pengamatan terhadap tabel di bagian 1, Karuna menemukan bahwa nilai sisa pembagian di kolom ketiga selalu sama dengan nilai $P(c)$ di kolom keempat. Oleh karena itu, dia menduga bahwa sisa pembagian polinomial $P(x)$ oleh $x - c$ selalu sama dengan nilai $P(c)$, yaitu nilai polinomial tersebut ketika $x = c$. Apakah kalian setuju dengan Karuna? Jika iya, jelaskan alasannya. Jika tidak, berikan satu contoh yang dapat membantah dugaannya Karuna.

Kalian telah mendapatkan simpulan mengenai sisa pembagian polinomial dan nilai fungsi polinomial. Bandingkan simpulan kalian dengan teorema berikut ini.

Sifat 2.1

Teorema Sisa

Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x - c$, maka sisanya sama dengan $P(c)$.

Teorema sisa tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan algoritma pembagian dan fakta bahwa derajat dari sisa pembagian selalu kurang dari polinomial pembagi. Untuk mengetahui penggunaan Teorema Sisa, perhatikan Contoh 2.9 berikut.

Contoh 2.9

Menggunakan Teorema Sisa

Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 10$ dibagi oleh $x + 4$. Dengan menggunakan Teorema Sisa, tentukan nilai $P(-4)$.

Alternatif Penyelesaian

Kalian akan melakukan pembagian pada dua polinomial yang diberikan dengan menggunakan metode Horner. Karena $x + 4 = x - (-4)$, maka pembagiannya ditunjukkan sebagai berikut.

-4	2	5	-10	9	0	-10
		-8	12	-8	-4	16 +
	2	-3	2	1	-4	6

Dengan demikian, hasil baginya adalah $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 4$ dan sisanya adalah 6.

Berdasarkan Teorema Sisa, nilai $P(-4)$ sama dengan sisa pembagian $P(x)$ oleh $x + 4 = x - (-4)$. Berdasarkan hasil sebelumnya, sisanya adalah 6, sehingga $P(-4) = 6$.

Jika $P(x) = 3x^5 - 20x^4 - 6x^3 - 48x - 8$ dibagi dengan $x - 7$, tentukan hasil bagi dan sisanya. Gunakan Teorema isa untuk mencari nilai $P(7)$.

Setelah mencermati Teorema Sisa, Ahmad mendapati bahwa $P(c)$ sama dengan sisa dari $P(x)$ setelah dibagi dengan $x - c$ karena c tersebut merupakan pembuat nol dari $x - c$ (yaitu, selesaian $x - c = 0$ adalah $x = c$). Berdasarkan hal ini, dia menduga bahwa Teorema Sisa tersebut juga berlaku jika pembaginya

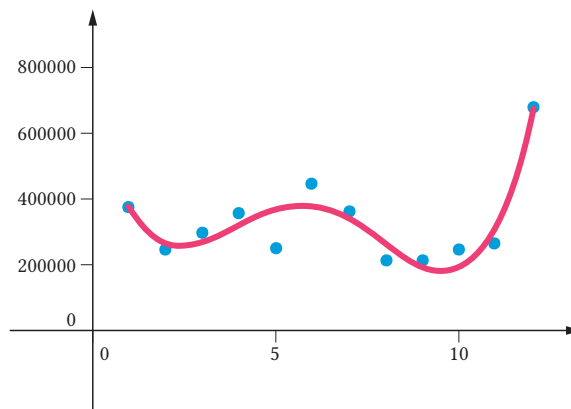
adalah $ax - b$. Karena pembuat nol $ax - b$ adalah $x = b/a$, maka dia berpendapat bahwa jika $P(x)$ dibagi dengan $ax - b$, maka sisanya sama dengan $P(b/a)$.

Apakah kalian setuju dengan dugaannya Ahmad? Jika iya, jelaskan alasannya. Jika tidak, berilah satu contoh yang membantah dugaan tersebut.

Berkunjung ke Candi Borobudur

Gambar 2.19 Candi Borobudur
Sumber: CEphoto/Uwe Aranas (2015)

Tak dapat dipungkiri, kemegahan dan keindahan Candi Borobudur telah mengundang banyak wisatawan untuk berkunjung ke candi tersebut. Candi yang merupakan salah satu Situs Warisan Dunia ini menjadi wujud betapa agungnya budaya dan peradaban masa lampau Bangsa Indonesia. Fakta tersebut menjadi daya tarik tersendiri bagi turis mancanegara untuk berkunjung ke Candi Borobudur.

Seperti yang dilansir oleh Badan Pusat Statistik Kabupaten Magelang, rata-rata banyaknya pengunjung Candi Borobudur pada tahun 2017–2019 adalah sekitar 320 ribu tiap bulannya. Secara lebih jelas, sebaran rata-rata banyaknya pengunjung candi tersebut setiap bulannya disajikan pada Gambar 2.20.

Gambar 2.20 Rata-Rata Banyaknya Pengunjung Candi Borobodur Setiap Bulan

Setelah mencermati grafik pada Gambar 2.20, kalian tentu tidak asing dengan polanya. Pola dalam grafik tersebut dapat dimodelkan dengan menggunakan fungsi polinomial berderajat 4. Fungsi polinomial berderajat 4 yang paling sesuai untuk memodelkan pola tersebut adalah sebagai berikut.

$$y = 888{,}06x^4 - 20.988x^3 + 162.571x^2 - 465.390x + 690.100$$

dengan x adalah bulan dan y adalah rata-rata banyaknya pengunjung di bulan tersebut. Dengan menggunakan model tersebut, dapatkah kalian memperkirakan banyak pengunjungnya di bulan Januari dan September?

Pembagian Polinomial

Kerjakan soal-soal latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau Salah.* Jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $Q(x)$, maka derajat sisa pembagiannya selalu kurang dari derajat $Q(x)$.
2. *Benar atau Salah.* Cermati proses pembagian dengan metode Horner berikut.

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 8 & -10 \\ & & 5 & -5 & 15 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{5} \end{array} +$$

   Pembagian tersebut dapat dituliskan ke dalam persamaan berikut.

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 8x - 10}{x + 5} = x^2 - x + 3 + \frac{5}{x + 5}$$

3. Karena polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x - c$ sisanya k, maka $P(c)$ = ______.

Penerapan Konsep

4. Jika $P(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$ dan $Q(x) = x^2 + 2x - 1$, tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $P(x)$ oleh $Q(x)$ dengan menggunakan pembagian bersusun dan nyatakan hasilnya ke dalam bentuk $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$.

5. Gunakan metode Horner untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian berikut ini.

$$\frac{2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 11x - 15}{x + 3}$$

6. Pembagian bersusun dan metode Horner berikut digunakan untuk mencari hasil bagi dan sisa pembagian setelah $P(x) = 3x^3 - 17x^2 + 31x - 8$ dibagi dengan $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

Cara 1: Pembagian Bersusun	Cara 2: Metode Horner
$\begin{array}{r l} & 3x - 5 \\ x^2 - 4x + 3 \,) & 3x^3 - 17x^2 + 31x - 8 \\ & 3x^3 - 12x^2 + 9x \quad - \\ \hline & -5x^2 + 22x - 8 \\ & -5x^2 + 20x - 15 \quad - \\ \hline & 2x + 7 \end{array}$ Dengan demikian, hasil baginya $3x - 5$ dan sisanya adalah $2x + 7$.	Karena $Q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, proses pembagiannya adalah sebagai berikut. $\begin{array}{c\|c c c c} 1 & 3 & -17 & 31 & -8 \\ & & 3 & -14 & 17 \; + \\ \hline 3 & 3 & -14 & 17 & \|\; 9 \\ & & 9 & -15 \; + & \\ \hline & 3 & -5 & \|\; 2 & \end{array}$ Jadi, hasil baginya adalah $3x - 5$ dan sisanya adalah 2.

Jawaban yang diperoleh dari dua cara tersebut ternyata berbeda. Tentukan letak kesalahannya.

7. Jika $P(x) = 3x^6 - 11x^5 + x^3 + 20x^2 - 3$ dan $c = \frac{2}{3}$, gunakan metode Horner dan Teorema Sisa untuk menentukan nilai $P(c)$.
8. Polinomial $P(x)$ jika dibagi $x - 2$ sisanya -3, dan jika dibagi $x + 3$ sisanya -13. Tentukan sisa polinomial tersebut jika dibagi $x^2 + x - 6$.
9. Perhatikan polinomial-polinomial $P(x)$ dan $Q(x)$ berikut.

   $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 10$

   $Q(x) = ((2x - 9)x + 7)x - 10$

   a). Tunjukkan bahwa kedua polinomial tersebut sama.

   b). Tentukan $P(4)$ dan $Q(4)$.

   c). Ubahlah bentuk polinomial $R(x) = x^4 - 13x^3 + 23x^2 - 12x + 10$ menjadi bentuk seperti polinomial $Q(x)$, dan gunakan hasilnya untuk menentukan $R(11)$.

d). Gunakan metode Horner untuk membagi $R(x)$ dengan $x - 11$.

e). Bandingkan operasi-operasi yang digunakan di bagian (c) untuk menghitung $R(11)$ dengan langkah-langkah yang digunakan di bagian (d).

D. Faktor dan Pembuat Nol Polinomial

Pada subbab sebelumnya, kalian telah mempelajari Teorema Sisa. Gunakan pemahaman kalian terhadap teorema tersebut untuk menyelesaikan aktivitas berikut.

Mencermati dan Memilih Pembagian Polinomial

Di aktivitas ini kalian akan mencermati pembagian polinomial dan melihat karakteristiknya. Untuk itu, lakukan pembagian pada setiap bentuk yang diberikan dan pilihlah satu bentuk pembagian yang menurut kalian berbeda dengan yang lain. Bersiaplah untuk memberikan alasan terhadap bentuk pembagian yang kalian pilih.

1. $\dfrac{x^2+4x-2}{x-1}$
2. $\dfrac{2x^2+9x+4}{x+3}$
3. $\dfrac{x^2-x-12}{x-4}$
4. $\dfrac{x^3-3x+1}{x^2+2x-1}$

1. Teorema Faktor

Jika suatu polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x - c$, salah satu kemungkinannya adalah bahwa pembagian tersebut menghasilkan sisa nol. Berdasarkan Teorema Sisa, kita dapat menyimpulkan bahwa $P(c) = 0$. Dengan kata lain, c adalah **pembuat nol** P. Jika c adalah pembuat nol P, apa hubungan $x - c$ dengan $P(x)$? Untuk menjawabnya, selesaikan aktivitas berikut.

Menuju Teorema Faktor

Aktivitas ini akan mengajak kalian menemukan hubungan antara pembuat nol dan faktor dari polinomial.

1. Lengkapi tabel berikut. Untuk mengisi kolom ketiga, tentukan nilai $P(c)$ untuk setiap $P(x)$ dan c yang diberikan. Untuk mengisi kolom keempat, bagilah $P(x)$ dengan $x - c$ dan nyatakan hasilnya ke dalam bentuk $P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S(x)$.

$P(x)$	c	$P(c)$	$P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S(x)$
$P(x) = x^2 - x - 12$	4		
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$	−3		
$P(x) = x^4 - 16$	−2		

2. Setelah melengkapi tabel pada bagian 1, Ambar menduga bahwa jika c adalah pembuat nol dari P, maka $x - c$ adalah faktor dari $P(x)$. Apakah kalian setuju dengan dugaannya Ambar? Jelaskan alasannya!
3. Ambar memiliki dugaan lagi. Dugaannya kali ini merupakan "kebalikan" dari dugaannya yang ada di bagian 2. Kali ini dia menduga bahwa jika $x - c$ adalah faktor dari $P(x)$, maka c adalah pembuat nol dari P. Apakah kalian sependapat dengan Ambar? Jelaskan alasannya!

Berdasarkan aktivitas eksplorasi sebelumnya, kalian telah menemukan ide dari Teorema Faktor. Isi dari Teorema Faktor disajikan sebagai berikut.

Sifat 2.4

Teorema Faktor

Misalkan $P(x)$ adalah suatu polinomial dan c adalah bilangan real. $P(c) = 0$ jika dan hanya jika $x - c$ merupakan faktor dari $P(x)$.

Untuk mengetahui penggunaan Teorema Faktor, perhatikan Contoh 2.10 berikut ini.

Contoh 2.10

Memfaktorkan Polinomial

Ajeng mengamati bahwa jumlah semua koefisien dan konstanta $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ sama dengan nol. Oleh karena itu, dia menyimpulkan bahwa $x - 1$ merupakan salah satu faktor $P(x)$. Buktikan kesimpulan Ajeng

tersebut dan gunakan kesimpulan itu untuk memfaktorkan $P(x)$ secara komplet.

Alternatif Penyelesaian

Kita akan membuktikan kesimpulan Ajeng dengan menggunakan Teorema Faktor, yaitu dengan menentukan nilai $P(1)$.

$$P(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 13(1) + 10 = 1 + 2 - 13 + 10 = 0$$

Karena $P(1) = 0$, maka berdasarkan Teorema Faktor, $x - c$ adalah faktor dari $P(x)$.

Selanjutnya, kita cari hasil bagi $P(x)$ setelah dibagi dengan $x - 1$ dengan menggunakan metode Horner.

1	1	2	−13	10
		1	3	−10
	1	3	−10	0

Dengan demikian, hasil baginya adalah $x^2 + 3x - 10$. Sekarang kita faktorkan $P(x)$ secara komplet seperti berikut.

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$	Polinomial yang diberikan
$= (x-1)(x^2 + 3x - 10)$	Hasil metode Horner sebelumnya
$= (x-1)(x-2)(x+5)$	$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

Misalkan $P(x) = x^3 - 2x^2 - 21x - 18$. Tunjukkan bahwa $P(-1) = 0$, dan gunakan hal tersebut untuk memfaktorkan $P(x)$ secara komplet.

Mari Berpikir Kritis

a). Apakah simpulan Ajeng di Contoh 2.10 selalu berlaku untuk semua polinomial yang jumlah koefisien dan konstantanya sama dengan nol? Jelaskan alasanmu!

b). Ajeng juga memiliki prinsip bahwa jika jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap sama dengan yang ganjil, maka polinomial tersebut memiliki faktor $x + 1$. (Misalnya untuk $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 5x + 21$, karena $3 + 5 = -13 + 21$ maka $P(x)$ memiliki faktor $x + 1$.) Apakah kalian setuju dengan Ajeng? Jelaskan alasan kalian.

Apa yang telah digunakan oleh Ajeng pada Contoh 2.11 sangat bermanfaat untuk menemukan faktor dari suatu polinomial. Selain itu, Sifat 2.5 berikut ini juga dapat membantu kita untuk menemukan pembuat nol rasional dari suatu polinomial.

Sifat 2.5

Pembuat Nol Rasional

Misalkan polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ memiliki koefisien dan konstanta yang semuanya bilangan bulat dengan $a_n \neq 0$ dan $a_0 \neq 0$. Jika polinomial $P(x)$ tersebut memiliki pembuat nol rasional p/q, maka p merupakan faktor dari a_0 dan q merupakan faktor dari a_n.

Sifat 2.5 tersebut bersama dengan Teorema Faktor dapat mempermudah kalian dalam menentukan faktor-faktor dari polinomial. Perhatikan Contoh 2.11 berikut.

Contoh 2.11

Menggunakan Teorema Faktor dan Pembuat Nol Rasional

Faktorkan polinomial $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ secara komplet.

Alternatif Penyelesaian

Jika polinomial tersebut memiliki pembuat nol rasional p/q, maka p merupakan faktor dari $a_0 = 18$, yaitu ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, dan ± 9 sedangkan q merupakan faktor dari $a_n = 1$, yaitu ± 1. Dengan cara coba-coba, kita dapat menunjukkan bahwa 3 adalah salah satu pembuat nol polinomial $P(x)$ tersebut.

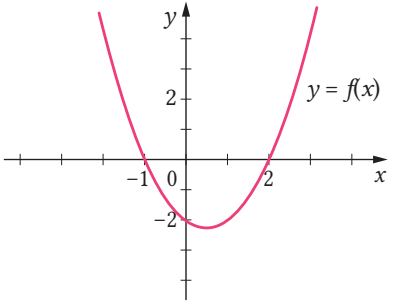
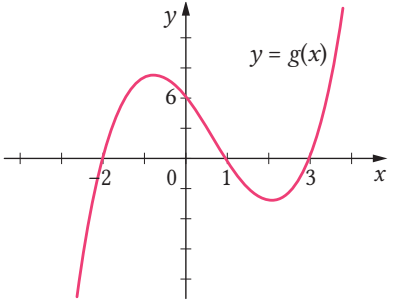
3	1	2	−9	−18
		3	15	18
	1	5	6	0

Dengan demikian, polinomial $P(x)$ dapat dituliskan sebagai perkalian faktor-faktornya seperti berikut.

$$P(x) = 3x^3 - 10x^2 + x + 6 = (x^2 + 5x + 6)(x - 3) = (x + 3)(x + 2)(x - 3)$$

Faktorkan $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ secara komplet.

2. Faktor, Pembuat Nol, dan Grafik Fungsi Polinomial

Kalian telah mempelajari Teorema Faktor di bagian sebelumnya. Teorema Faktor tersebut memberikan koneksi antara pembuat nol dan faktor suatu polinomial. Sekarang kita akan memperluas hubungan tersebut secara visual dengan menggunakan grafik fungsi polinomial.

Menemukan Koneksi antara Faktor Fungsi Polinomial dan Grafiknya

Di aktivitas ini kalian akan dipandu untuk menemukan koneksi antara fungsi polinomial yang dinyatakan ke dalam bentuk pemfaktoran dan grafik fungsi polinomial tersebut.

1. Gunakan informasi pada Grafik 2.21 dan 2.22 untuk melengkapi tabel berikut ini dengan bentuk pemfaktoran dari fungsi polinomial yang diberikan. (Untuk menentukan bentuk pemfaktorannya, kalian dapat memanfaatkan pembuat nol rasional dan Teorema Faktor.)

Fungsi Polinomial	Grafik
$f(x) = x^2 - x - 2$ Bentuk pemfaktoran: $f(x) =$ ___________	Gambar 2.21 Grafik Fungsi *f*
$g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ Bentuk pemfaktoran: $g(x) =$ ___________	Gambar 2.22 Grafik Fungsi *g*

2. Amati kembali bentuk pemfaktoran fungsi polinomial dan grafiknya pada bagian 1. Apa yang dapat kalian simpulkan?

Di dalam aktivitas eksplorasi sebelumnya kalian telah menemukan prinsip yang sangat berguna untuk menggambar grafik fungsi polinomial. Jika fungsi polinomial dapat kita nyatakan ke dalam perkalian faktor-faktornya secara komplet, maka faktor-faktor tersebut berhubungan dengan perpotongan grafik fungsi tersebut terhadap sumbu *X*. Prinsip ini ditegaskan oleh **sifat hasil kali nol**. Misalnya *A* dan *B* adalah bentuk-bentuk aljabar, maka berdasarkan sifat hasil kali nol pernyataan berikut benar.

$$A \cdot B = 0 \text{ jika dan hanya jika } A = 0 \text{ atau } B = 0$$

Oleh karena itu, sampai di sini kita telah mendapatkan dua hal yang sangat membantu untuk menggambar grafik fungsi polinomial, yaitu perilaku ujung-ujung grafik yang telah kalian pelajari di subbab A dan perpotongan grafik dengan sumbu *X* yang telah kalian temukan di aktivitas eksplorasi sebelumnya.

Selain kedua hal tersebut, kita juga dapat menentukan perpotongan grafik dengan sumbu *Y* dengan cara mensubstitusi $x = 0$ ke dalam persamaan fungsi. Untuk lebih memahaminya, perhatikan Contoh 2.12 berikut.

Contoh 2.12

Perpotongan Grafik dengan Sumbu *X*

Tentukan perpotongan grafik fungsi $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$ terhadap sumbu *X*.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan perpotongan grafik fungsi *f*, kita tentukan semua pembuat nolnya. Karena jumlah koefisien suku-suku yang memiliki eksponen ganjil sama dengan yang genap, $-2 + 10 = -4 + 12$, maka -1 adalah pembuat nol *f* atau $x + 1$ adalah salah satu faktornya (lihat kembali prinsipnya Ajeng di Mari, Berpikir Kritis terakhir).

Selanjutnya kita gunakan metode Horner untuk menentukan hasil bagi $f(x)$ setelah dibagi $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} -1 & -2 & -4 & 10 & 12 \\ & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & -2 & -2 & 12 & 0 \end{array} \; +$$

Dengan demikian, $-2x^3 - 4x^2 + 10x + 12 = (x + 1)(-2x^2 - 2x + 12)$. Sekarang, kita tentukan semua pembuat nolnya.

$$\begin{aligned} (x+1)(-2x^2-2x+12) &= 0 && \text{Hasil metode Horner sebelumnya} \\ -2(x+1)(x^2+x-6) &= 0 && \text{Faktorkan keluar } -2 \text{ dari } -2x^2-2x+12 \\ -2(x+1)(x+3)(x-2) &= 0 && x^2+x-6=(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita selesaikan persamaan terakhir dengan menggunakan sifat hasil kali nol.

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \quad \text{atau} \quad & x+3 &= 0 \quad \text{atau} \quad & x-2 &= 0 \\ x &= -1 & x &= -3 & x &= 2 \end{aligned}$$

Jadi, grafik f memotong sumbu X di $x = -3, -1$, dan 2.

Tentukan perpotongan grafik fungsi $g(x) = x^3 - 3x + 2$ terhadap sumbu X.

3. Pembuat Nol Kompleks

Pada Contoh 2.11 kalian telah melihat bagaimana memfaktorkan suatu polinomial berderajat tiga menjadi perkalian tiga faktornya. Sekarang, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut untuk melakukan pemfaktoran pada polinomial lainnya.

Menemukan Semua Pembuat Nol Suatu Polinomial

Aktivitas ini akan memandu kalian untuk menemukan semua pembuat nol suatu polinomial dan memfaktorkan polinomial tersebut secara komplet.

1. Carilah semua bilangan yang jika dipangkatkan empat hasilnya 81. Ada berapa bilangan yang dapat kalian temukan?
2. Jelaskan mengapa permasalahan di bagian 1 sama saja dengan meminta kalian untuk menentukan semua nilai x yang memenuhi persamaan berikut.

   $$x^4 - 81 = 0$$

3. Dengan memperhitungkan bilangan-bilangan kompleks, Julvri dapat menemukan empat selesaian dari persamaan $x^4 - 81 = 0$. Menurut kalian, empat selesaian tersebut apa saja?
4. Berdasarkan hasil di bagian 3, faktorkan $x^4 - 81$ secara komplet.

Dari kegiatan eksplorasi sebelumnya, kalian telah menyadari pembuat nol-pembuat nol yang berupa bilangan kompleks dari suatu polinomial. Pembuat nol seperti ini disebut dengan pembuat nol kompleks. Berdasarkan teorema faktor, hasil kegiatan eksplorasi tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

Sifat 2.6

Faktorisasi Penuh Polinomial

Jika $P(x)$ adalah polinomial berderajat n dengan $n \geq 1$, maka ada bilangan-bilangan kompleks a, c_1, c_2, ..., c_n (dengan $a \neq 0$) sedemikian sehingga

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

Perhatikan Contoh 2.13 berikut untuk melihat bagaimana menentukan pembuat nol dan faktor-faktor yang melibatkan bilangan kompleks dari suatu polinomial.

Contoh 2.13

Menggunakan Faktorisasi Penuh Suatu Polinomial

Tentukan semua pembuat nol kompleks dari $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ dan faktorkan polinomial tersebut secara penuh.

Alternatif Penyelesaian

Pertama, kita faktorkan polinomial yang diberikan berikut ini.

$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$	Polinomial yang diberikan
$= x^2(x-1) + (x-1)$	Faktorkan keluar x^2 di dua suku pertama
$= (x^2+1)(x-1)$	Sifat distributive

Untuk menentukan pembuat nol P, selesaikan persamaan $P(x) = 0$. Dengan menggunakan sifat hasil kali nol, persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan membuat semua faktor $P(x)$ sama dengan nol.

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{atau} \qquad x - 1 = 0$$
$$x^2 = -1 \qquad\qquad x = 1$$
$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Ada tiga pembuat nol P, yaitu 1, i, dan $-i$. Dengan menggunakan Teorema Faktor, maka kita dapat menuliskan $P(x)$ menjadi seperti berikut.

$$P(x) = (x-1)(x-i)(x-(-i)) = (x-1)(x-i)(x+i)$$

Tentukan semua pembuat nol kompleks dari $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$, kemudian faktorkan $P(x)$ tersebut.

Mari Berpikir Kritis

Apakah mungkin suatu polinomial yang semua koefisien dan konstantanya berupa bilangan real memiliki tepat satu pembuat nol bilangan kompleks yang bukan bilangan real?

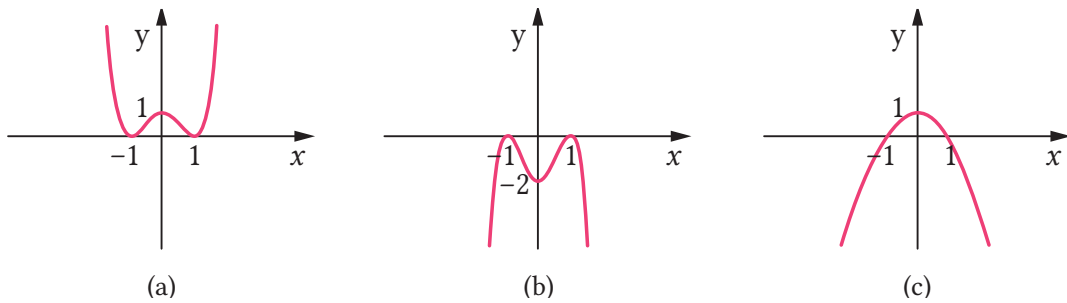
Faktor dan Pembuat Nol Polinomial

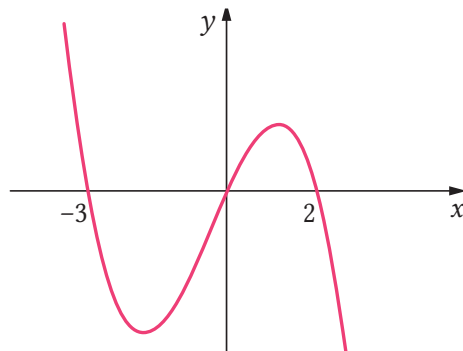
Kerjakan soal-soal latihan berikut dengan tepat!

Pemahaman Konsep

1. Untuk suatu polinomial $P(x)$, nilai $P(10)$ adalah 0. Dengan demikian, ______ adalah faktor dari polinomial tersebut.
2. *Benar atau Salah.* Grafik fungsi polinomial $P(x)$ memotong sumbu X di titik (3, 0). Dengan demikian, $(x + 3)$ adalah faktor dari $P(x)$.
3. *Benar atau Salah.* Fungsi $P(x) = (x + 7)(x + 3)(x - 2)$ adalah fungsi polinomial berderajat tiga satu-satunya yang grafiknya memotong sumbu X di (−7, 0), (−3, 0), dan (2, 0).

Penerapan Konsep

4. Jika $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$, tunjukkan bahwa $P(-3) = 0$ dan $P(2) = 0$. Gunakan fakta tersebut untuk memfaktorkan $P(x)$ secara komplet.
5. Faktorkan $P(x) = 5x^3 - 28x^2 + 45x - 18$ secara komplet.
6. Dari ketiga grafik pada Gambar 2.23, manakah yang merupakan grafik dari $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2$?

Gambar 2.23 Tiga Grafik Fungsi Polinomial

7. Diberikan tiga fungsi polinomial, yaitu $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$, $g(x) = -x^3 - x^2 + 6x$, dan $h(x) = x^3 - 4x$. Dari ketiga fungsi tersebut, manakah yang grafiknya ditunjukkan seperti pada Gambar 2.24? Jelaskan alasannya.

Gambar 2.24 Grafik Fungsi Polinomial

8. Carilah polinomial berderajat 4 yang pembuat nolnya adalah −3, 0, 1, dan 4 dan koefisien x^2-nya adalah 11.
9. Jika $x + 2$ dan $x - 3$ adalah faktor dari $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 18$, tentukan nilai a dan b.
10. Carilah semua pembuat nol kompleks dari $P(x) = x^4 - 5x^2 - 36$, kemudian faktorkan polinomial tersebut secara penuh.
11. Tentukan selesaian kompleks dari persamaan $x^3 - x^2 + 5 = 10x - 1$.
12. Sebuah peti kemas memiliki panjang 1 meter lebih dari dua kali lebarnya, sedangkan tingginya dua kali lebarnya. Jika volume peti kemas tersebut 936 m^3, tentukan luas permukaan peti kemas tersebut.

E. Identitas Polinomial

Kalian dapat menggunakan matematika untuk bermain sulap? Untuk mengetahuinya, silakan kerjakan aktivitas eksplorasi berikut.

Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial

Melalui aktivitas ini kalian akan mengetahui bagaimana menggunakan identitas polinomial untuk bermain sulap. Untuk itu, lakukan langkah-langkah berikut ini.

1. Pilihlah satu bilangan secara bebas.
2. Jumlahkan bilangan tersebut dengan 1 dan kurangi bilangan tersebut dengan 1, kemudian kalikan hasil penjumlahan dan pengurangan tersebut.
3. Jumlahkan hasil sebelumnya dengan 11.
4. Setelah selesai, kurangi hasilnya dengan kuadrat dari bilangan yang kalian pilih di awal tadi.

Berapapun bilangan yang kalian pilih di awal, kalian selalu akan mendapatkan 10. Sekarang cermati kembali apa yang telah kalian lakukan untuk mendapatkan bilangan 10 tadi, kemudian kerjakan soal-soal berikut.

a). Jika bilangan yang kalian pilih tadi adalah x. Bentuk aljabar seperti apa yang dapat memodelkan operasi-operasi matematika yang kalian lakukan mulai dari langkah 1 sampai 4?

b). Tunjukkan bahwa bentuk aljabar yang kalian temukan di bagian (a) hasilnya selalu sama dengan 10.

c). Tunjukkan bahwa persamaan yang digunakan dalam permainan sulap tadi setara dengan persamaan $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Dengan ide yang sama, buatlah permainan sulap yang berbeda dan terapkan ke teman kalian.

Di aktivitas eksplorasi tersebut, kalian telah menggunakan suatu persamaan polinomial yang selalu benar untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya. Persamaan seperti ini disebut dengan **identitas polinomial**. Identitas polinomial yang digunakan di aktivitas ekplorasi sebelumnya merupakan bentuk khusus

dari salah satu identitas yang sudah dipelajari di pembelajaran-pembelajaran sebelumnya. Identitas-identitas tersebut antara lain sebagai berikut.

Sifat 2.7

Beberapa Identitas Polinomial

Berikut ini adalah beberapa identitas polinomial.

a). $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
b). $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
c). $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
d). $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
e). $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
f). $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
g). $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Untuk membuktikan bahwa suatu persamaan merupakan identitas, kita perlu menunjukkan bahwa bentuk yang di ruas kiri persamaan tersebut sama dengan yang di ruas kanan untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya. Sebaliknya, jika kita ingin menunjukkan bahwa suatu persamaan bukan merupakan identitas, kita cukup memberikan satu contoh nilai variabel yang membuat bentuk di ruas kiri persamaan tersebut tidak sama dengan bentuk yang di ruas kanan. Untuk lebih memahaminya, perhatikan Contoh 2.14 berikut.

Contoh 2.14

Membuktikan Identitas Polinomial

Buktikan apakah setiap persamaan berikut merupakan identitas polinomial atau bukan.

a). $(2x^2 - y^2)^2 = 4x^4 - 4x^2y^2 + y^4$

b). $(2a - 5)(2a + 5) = 4a^2 - 20a + 25$

Alternatif Penyelesaian

a). Persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial. Untuk membuktikannya, kita akan memulai dari ruas kiri, yaitu kita tunjukkan bahwa bentuk di ruas kiri sama dengan bentuk yang berada di ruas kanan seperti berikut.

$$\left(2x^2 - y^2\right)^2 = \left(2x^2\right)^2 - 2\left(2x^2y^2\right) + \left(y^2\right)^2 \quad \text{Identitas polinomial 1}$$

$$= 4x^4 - 4x^2y^2 + y^4 \quad \text{Sederhanakan}$$

Karena kalian telah menunjukkan bahwa bentuk ruas kiri sama dengan bentuk ruas kanan, maka terbukti bahwa persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial.

b). Kita pilih $a = 0$ untuk menentukan nilai yang berada di ruas kiri dan kanan persamaan.

Ruas kiri $= (2 \cdot 0 - 5)(2 \cdot 0 + 5) = (-5)(5) = -25$

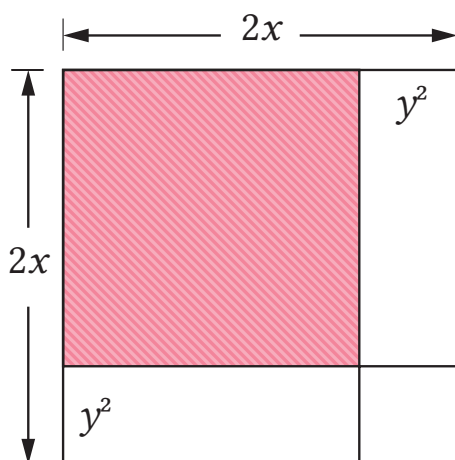
Ruas kanan $= 4(0)^2 - 20(0) + 25 = 25$

Karena ada $a = 0$ yang menyebabkan bentuk ruas kiri tidak sama dengan yang di ruas kanan, maka persamaan polinomial yang diberikan bukan merupakan identitas polinomial.

Buktikan bahwa persamaan-persamaan polinomial berikut merupakan identitas polinomial atau bukan.

a). $(2m - 3)^3 = 8m^3 - 27$

b). $(2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$

Identitas pada Contoh 2.14 bagian (a) juga dapat ditunjukkan dengan menggunakan luas persegi. Hal ini diilustrasikan oleh Gambar 2.25 berikut ini.

Gambar 2.25 Luas persegi

Mari Berkolaborasi

Buatlah sebuah identitas polinomial dan mintalah teman kalian untuk membuktikan identitas polinomial tersebut. Koreksilah pekerjaan teman kalian tersebut menggunakan proses yang telah kalian lakukan untuk membuat identitas tersebut.

Salah satu kegunaan identitas polinomial adalah untuk memfaktorkan polinomial. Hal ini ditunjukkan oleh Contoh 2.15 berikut ini.

Contoh 2.15

Menggunakan Identitas Polinomial

Faktorkan $(3x - 1)^2 - 25$.

Alternatif Penyelesaian

Polinomial yang diberikan merupakan pengurangan dua bentuk kuadrat. Oleh karena itu, kita gunakan identitas polinomial 1 untuk memfaktorkannya.

$$(3x-1)^2 - 25 = (3x-1)^2 - 5^2 \quad \text{25 = 52}$$

$$= \left[(3x-1)+5\right]\left[(3x-1)-5\right] \quad \text{Identitas polinomial 1}$$

$$= \left[3x-1+5\right]\left[3x-1-5\right] \quad \text{Hilangkan tanda kurung}$$

$$= (3x+4)(3x-6) \quad \text{Sederhanakan}$$

Faktorkan $4x^2 + 12xy + 9y^2$.

Identitas Polinomial

Kerjakan soal-soal latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau Salah.* Semua persamaan polinomial merupakan identitas polinomial.
2. *Benar atau Salah.* Jika ada satu saja nilai variabel yang tidak memenuhi suatu persamaan polinomial, maka persamaan polinomial tersebut bukanlah identitas polinomial.
3. $p^3 - q^3 =$ ________________.

Penerapan Konsep

4. Buktikan apakah persamaan-persamaan polinomial berikut merupakan identitas polinomial atau bukan.

   a). $3(x - 1)^2 = (3x - 3)^2$

   b). $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab - ac + bc)$

5. Jika $(x^2 + x - 6)(x - 4) = P(x) \cdot (x + 3)$ adalah identitas, tentukan polinomial $P(x)$.
6. **Masalah Bilangan.** Togar melakukan perhitungan terhadap beberapa pasang bilangan sebagai berikut.

   $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ $\quad$ $3 + 2 = 5$

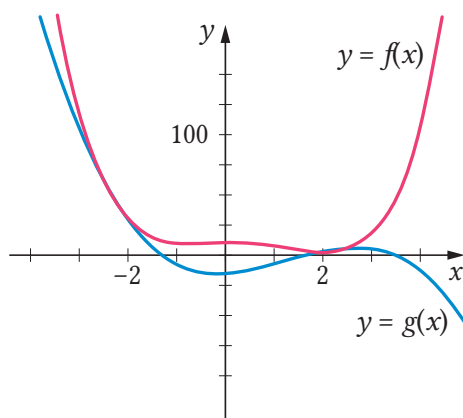
   $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$ $\quad$ $4 + 3 = 7$

   $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ $\quad$ $5 + 4 = 9$

   $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$ $\quad$ $6 + 5 = 11$

   Setelah mengamati polanya, Togar menyimpulkan bahwa selisih dari kuadrat dua bilangan bulat yang berurutan selalu sama dengan jumlah kedua bilangan tersebut. Apakah kalian setuju dengan pernyataannya Togar? Jika iya, buktikan pernyataan tersebut. Jika tidak, carilah satu contoh yang menyangkalnya.

7. **Tripel Pythagoras.** Jika a dan b adalah bilangan-bilangan real positif dengan $a > b$, buktikan bahwa $a^2 - b^2$, $2ab$, dan $a^2 + b^2$ merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku.
8. Faktorkan setiap polinomial berikut ini.
   a). $16(4 - 3x)^2 - 25$

   b). $m^4 + 6m^2n^2 + 9n^4$
9. Grafik fungsi $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 10$ dan $g(x) = -2x^3 + 8x^2 + x - 15$ ditunjukkan pada gambar berikut.

Gambar 2.26 Grafik Fungsi f dan g

Tentukan titik-titik potong kedua grafik tersebut.

1. Monomial adalah suatu bilangan, suatu variabel berpangkat bilangan cacah, atau perkalian antara bilangan dan satu atau lebih variabel-variabel berpangkat bilangan cacah. Polinomial adalah bentuk aljabar yang berupa monomial atau penjumlahan dari dua atau lebih monomial.
2. Jika suatu monomial berbentuk ax^n dengan a adalah koefisien tak nol, derajat monomial tersebut adalah n. Jika suatu monomial terdiri dari beberapa variabel, derajatnya adalah jumlah dari eksponen semua variabel tersebut. Derajat suatu polinomial adalah derajat dari sukunya yang berderajat tertinggi.
3. Fungsi polinomial memiliki bentuk umum $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$ dengan $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$, dan a_0 adalah bilangan-bilangan real, $a_n \neq 0$, dan n adalah bilangan cacah.

4. Perilaku ujung-ujung grafik fungsi polinomial dipengaruhi oleh derajatnya (genap atau ganjil) dan koefisien utamanya (positif atau negatif).
5. Penjumlahan dan pengurangan polinomial dilakukan dengan menjumlahkan atau mengurangkan suku-suku yang sejenis. Perkalian polinomial dilakukan dengan menggunakan sifat distributif.
6. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial, dengan $Q(x) \neq 0$, maka ada polinomial-polinomial $H(x)$ dan $S(x)$ yang masing-masing tunggal, dengan $S(x)$ adalah 0 atau polinomial berderajat kurang dari $Q(x)$, sehingga

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \text{ atau } P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$$

7. Pembagian polinomial dapat dilakukan dengan cara bersusun ataupun metode Horner.
8. Berdasarkan Teorema Sisa, jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x - c$, maka sisanya sama dengan $P(c)$.
9. Misalkan $P(x)$ adalah suatu polinomial dan c adalah bilangan real. Berdasarkan Teorema Faktor, c adalah pembuat nol P jika dan hanya jika $x - c$ faktor dari $P(x)$.
10. Pada grafik suatu fungsi polinomial, pembuat nol polinomial tersebut direpresentasikan dengan perpotongan grafik tersebut terhadap sumbu X.
11. Jika $P(x)$ adalah polinomial berderajat n dengan $n \geq 1$, maka ada bilangan-bilangan kompleks $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (dengan $a \neq 0$) sehingga

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

12. Identitas polinomial adalah persamaan polinomial yang selalu benar untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya.
13. Berikut ini adalah beberapa identitas polinomial yang sering digunakan.
    a). $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
    b). $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
    c). $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
    d). $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
    e). $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
    f). $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
    g). $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Uji Pemahaman

Benar atau Salah. Tentukan apakah pernyataan nomor 1 sampai 3 berikut benar atau salah.

1. Perilaku ujung grafik fungsi polinomial yang berderajat ganjil dan memiliki koefisien utama negatif adalah mengarah ke kiri bawah dan kanan atas (↙, ↗).
2. Pembagian pada dua polinomial dilakukan dengan menggunakan metode Horner sebagai berikut.

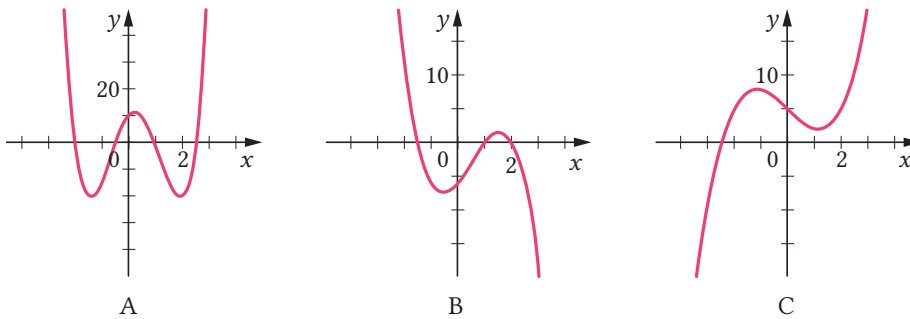
3	1	0	−3	−8
		3	9	18
	1	3	6	10

   Hasil pembagian tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

   $$x^3 - 3x - 8 = (x - 3)(x^2 + 3x + 6) + 10$$

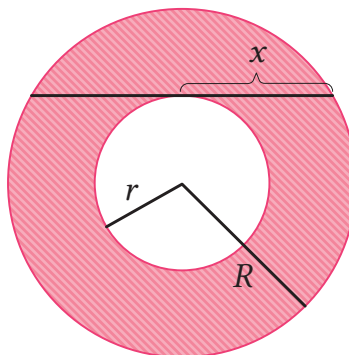
3. Persamaan $4a^2 - 1 = (2a + 1)(2a - 1)$ merupakan identitas polinomial.

Isian Singkat. Lengkapilah pernyataan nomor 4 – 6 berikut dengan isian yang paling tepat.

4. Jika $a \neq 0$, derajat ax^ny^m adalah ______.
5. Berdasarkan Teorema Sisa, jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x + 4$, sisanya adalah ______.
6. Grafik $P(x) = (x + 5)(x + 2i)(x - 2i)$ memotong sumbu X di ______.
7. Tentukan derajat dari polinomial $9 - x + 2x^2 - 4x^3 - 5x^4$ dan $3a^4b^3 - 4a^5 + 2b^3 - 10$.
8. Deskripsikan perilaku ujung grafik fungsi polinomial $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ dan pilihlah grafik pada Gambar 2.27 yang paling sesuai untuk merepresentasikan grafik fungsi f tersebut.

Gambar 2.27 Tiga Grafik Fungsi Polinomial

9. Sederhanakan $(m + n + 1)(m + n - 1) - (m - n + 1)(m + n + 1)$.
10. Misalkan $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 3$ dan $Q(x) = (x + 2)(x - 2)$. Bagilah $P(x)$ dengan $Q(x)$ kemudian nyatakan hasilnya ke dalam bentuk $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$.
11. Gunakan metode Horner dan Teorema Sisa untuk menentukan nilai $P(c)$ jika $P(x) = x^4 - 10x^3 + 84x - 28$ dan $c = 9$.
12. Tentukan semua titik potong grafik fungsi polinomial $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$ dengan sumbu X.
13. Tentukan semua pembuat nol kompleks dari polinomial $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ dan faktorkan polinomial tersebut secara penuh.
14. Buktikan apakah persamaan polinomial $49 - (2x + 7)^2 = -2x(14 + 2x)$ dan $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ merupakan identitas polinomial.

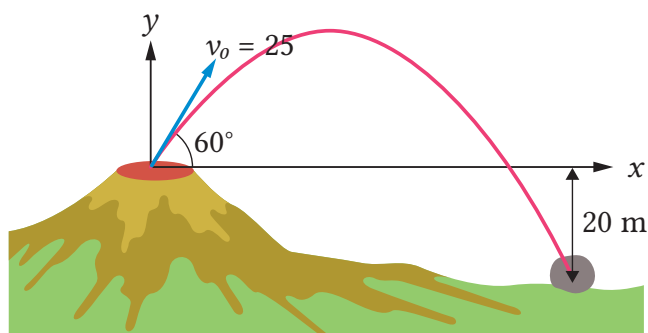
Penerapan

15. **Luas Daerah.** Perhatikan daerah yang diarsir pada Gambar 2.28 Daerah tersebut terletak di antara dua lingkaran yang memiliki pusat sama.

Gambar 2.28 Luas Daerah yang Diarsir

Nyatakan luas daerah yang diarsir sebagai fungsi terhadap x.

15. **Luas Permukaan.** Sebuah kotak karton berbentuk balok memiliki panjang, lebar, dan tinggi secara berturut-turut 50 cm, 30 cm, dan 25 cm.
    a). Tentukan luas permukaan kotak tersebut.
    b). Jika kotak tersebut dibuat ulang dengan memotong panjang, lebar, dan tingginya sepanjang x m, tentukan luas permukaan kotak yang baru.
    c). Tentukan nilai x jika luas permukaan kotak yang baru adalah 3.400 m^2.
16. **Volume.** Seutas kawat yang panjangnya 144 cm akan digunakan untuk membuat rangka balok yang alasnya berbentuk persegi dengan panjang sisi x cm.
    a). Nyatakan volume balok tersebut sebagai fungsi terhadap x.
    b). Tentukan daerah asal fungsi di bagian (a).
    c). Tentukan volume balok tersebut untuk $x = 12$.
17. **Finansial.** Jika uang sejumlah 100 juta rupiah ditabung ke dalam bank selama 3 tahun, maka saldo uang tersebut (dalam jutaan rupiah) dinyatakan ke dalam rumus berikut.

    $$S(x) = 100(1 + x)^3$$

    dengan x adalah bunga yang diberikan bank tersebut per tahunnya. Tentukan saldonya jika bank tersebut memberikan bunga 5% per tahunnya.
18. **Letusan Gunung Berapi.** Gunung Semeru adalah salah satu gunung berapi yang dapat melontarkan batu pijar ketika meletus. Misalkan sebongkah batu besar terlontar dari kawah gunung tersebut dengan kecepatan 25 m/s dan dengan sudut 60° di atas garis horizontal, perhatikan gambar berikut.

Gambar 2.29 Lontaran Batu Pijar

Dengan menggunakan prinsip-prinsip fisika dan dengan menganggap bahwa kawah gunung tersebut sebagai titik (0, 0), lintasan batu tersebut dapat dimodelkan sebagai fungsi berikut.

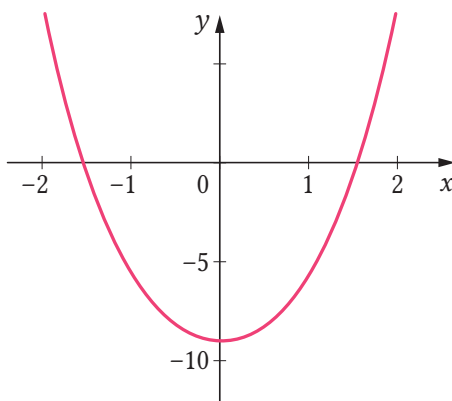
$$y = \sqrt{3}x - \frac{4}{125}x^2$$

dengan x adalah jarak horizontal yang telah ditempuh batu tersebut, sedangkan y adalah ketinggiannya relatif terhadap kawah gunung.

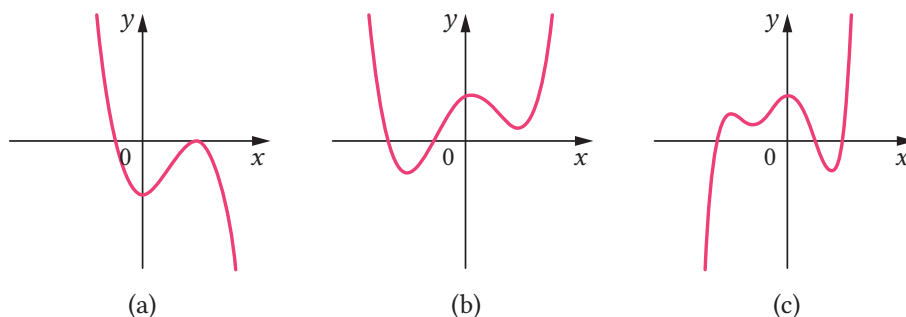
a). Tentukan ketinggian batu tersebut relatif terhadap kawah gunung ketika $x = 25$.

b). Batu tersebut membentur tanah ketika batu itu terletak 20 m di bawah kawah. Tentukan jarak horizontal batu tersebut dari kawah ketika sampai di tanah.

Penalaran

19. Nyoman mengalikan $(2x + 3)(2x - 3)$ dan menghasilkan $4x^2 + 9$. Untuk memeriksa apakah yang dilakukannya sudah tepat, dia menggunakan kalkulator grafik untuk menggambar grafik $y = (2x + 3)(2x - 3)$ dan $y = 4x^2 + 9$. Hasilnya diperlihatkan pada gambar berikut.

Gambar 2.30 Tampilan Kalkulator Grafik

Karena dia hanya melihat satu grafik, maka dia menganggap bahwa grafik $y = (2x + 3)(2x - 3)$ berhimpit dengan $y = 4x^2 + 9$. Dengan demikian, kedua polinomial tersebut sama sehingga jawabannya sudah tepat. Jelaskan mengapa kesimpulan Nyoman terhadap tampilan kalkulator grafiknya tidak tepat.

20. Untuk setiap fungsi polinomial yang dinyatakan ke dalam grafiknya ini, tentukan banyaknya pembuat nol real dan pembuat nol tak realnya. Jelaskan juga alasannya.

Gambar 2.31 Tiga Grafik Fungsi Polinomial

21. Buktikan Sifat 2.5, yaitu jika $P(x)$ adalah polinomial yang semua koefisien dan konstantanya adalah bilangan bulat dengan koefisien utama dan konstantanya tidak nol serta memiliki pembuat nol rasional p/q, maka p adalah faktor dari konstanta dan q adalah faktor dari koefisien utama $P(x)$.

Strategi Menang Lelang

Gambar 2.32 Suasana Lelang.
Sumber: Pixabay/Daniel_B_photos (2021)

Pernahkan kalian mengikuti atau sekedar melihat acara lelang? Bagaimana proses pelelangannnya? Di dalam suatu lelang, kalian dapat melakukan penawaran secara terbuka maupun tertutup. Jika dilakukan secara terbuka, orang lain dapat melihat berapa besar penawaran kalian. Sebaliknya, jika dilakukan secara tertutup, orang lain tidak dapat melihat penawaran yang kalian buat. Selain itu, kalian juga dapat melakukan penawaran berkali-kali atau hanya satu kali. Orang yang melakukan penawaran tertinggi akan menjadi pemenang lelang.

Bayangkan kalian sedang melakukan acara lelang bersama dengan teman-teman. Di dalam pelelangan tersebut, kalian hanya boleh melakukan penawaran satu kali secara tertutup. Barang yang dilelang adalah sebuah novel baru.

1. Harga sebenarnya dari novel tersebut adalah Rp100.000,00. Agar mendapat keuntungan, kalian tentu akan memberikan penawaran di bawah harga tersebut. Sebagai contoh, jika kalian dapat mendapatkan novel tersebut hanya dengan penawaran Rp10.000,00, keuntungan yang kalian dapatkan adalah Rp90.000,00. Untuk setiap penawaran yang disajikan dalam tabel berikut, berapakah keuntungan yang dapat kalian dapatkan?

Penawaran	10.000	20.000	40.000	80.000	p
Keuntungan					

2. Di dalam lelang tersebut, misalnya kalian hanya melawan satu teman dan teman tersebut juga mengetahui bahwa harga sebenarnya novel tersebut adalah Rp100.000,00. Berapakah peluang kalian dapat menang dengan penawaran Rp20.000,00? Dengan kata lain, berapakan peluang teman kalian melakukan penawaran di bawah Rp20.000,00?
3. Berapakan peluang kalian menang dengan penawaran p rupiah?
4. Jika dalam suatu penawaran kalian memiliki peluang menang 40% dengan keuntungan Rp60.000,00, maka dapat dikatakan bahwa *keuntungan harapannya* adalah 40% × Rp60.000,00 = Rp24.000,00. Buatlah persamaan yang memodelkan harapan keuntungan yang kalian peroleh jika menawar sebesar p rupiah, kemudian sketsalah grafiknya. Berapakah keuntungan harapan maksimum yang dapat kalian peroleh?
5. Misalnya ada satu teman lagi yang bergabung ke dalam lelang tersebut sehingga banyaknya peserta lelang menjadi tiga orang. Bagaimana pengaruh keikutsertaannya terhadap keuntungan dan peluang menang kalian dalam lelang tersebut? Buatlah persamaan untuk menghitung keuntungan harapannya jika penawarannya sebesar p rupiah, kemudian sketsalah grafiknya. Berapakah keuntungan harapan maksimumnya?

6. Buatlah persamaan untuk menentukan keuntungan harapan jika diketahui penawarannya p rupiah dan banyaknya peserta lelangnya n orang. Jika banyaknya peserta semakin banyak, bagaimana keuntungan harapan maksimumnya?

Ingatlah kembali pengalaman belajar kalian di Bab 2 Polinomial ini. Setelah itu, refleksikan pengalaman belajarmu tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut.

1. Sejauh mana manfaat yang dapat kalian rasakan setelah berdinamika di Bab 2 Polinomial? Ceritakan manfaat yang dapat kalian rasakan.
2. Strategi-strategi belajar seperti apa yang kalian gunakan untuk belajar di Bab 2 Polinomial? Apakah semua strateginya sudah membantu untuk belajar secara optimal?
3. Sekarang, nilailah pembelajaran kalian sendiri di Bab 2 Polinomial ini dengan mencentang kolom-kolom yang sesuai pada tabel berikut.

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
Subbab A Polinomial dan Fungsi Polinomial				
1.	Saya dapat membedakan polinomial dan bukan polinomial.			
2.	Saya dapat menentukan derajat dari suatu polinomial.			
3.	Saya mengetahui bentuk umum fungsi polinomial dan mengidentifikasi karakteristik grafiknya.			
Subbab B Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial				
4.	Saya dapat melakukan penjumlahan polinomial secara tepat.			
5.	Saya dapat melakukan pengurangan polinomial dengan benar.			
6.	Saya dapat mengalikan polinomial secara tepat.			

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
Subbab C Pembagian Polinomial				
7.	Saya dapat melakukan pembagian polinomial dengan cara bersusun.			
8.	Saya dapat menggunakan metode Horner untuk membagi polinomial.			
9.	Saya dapat menggunakan Teorema Sisa untuk menentukan nilai suatu polinomial.			
Subbab D Faktor dan Pembuat Nol Polinomial				
10.	Saya dapat menggunakan Teorema Faktor untuk memfaktorkan suatu polinomial.			
12.	Saya dapat menentukan pembuat nol rasional dari suatu polinomial dengan melihat koefisien utama dan konstantanya.			
13.	Saya dapat melihat koneksi antara faktor, pembuat nol, dan grafik suatu polinomial.			
14.	Saya dapat menentukan semua pembuat nol kompleks dari suatu polinomial.			
Subbab E Identitas Polinomial				
15.	Saya dapat membuktikan identitas polinomial.			
16.	Saya dapat menggunakan identitas polinomial untuk memfaktorkan suatu polinomial.			

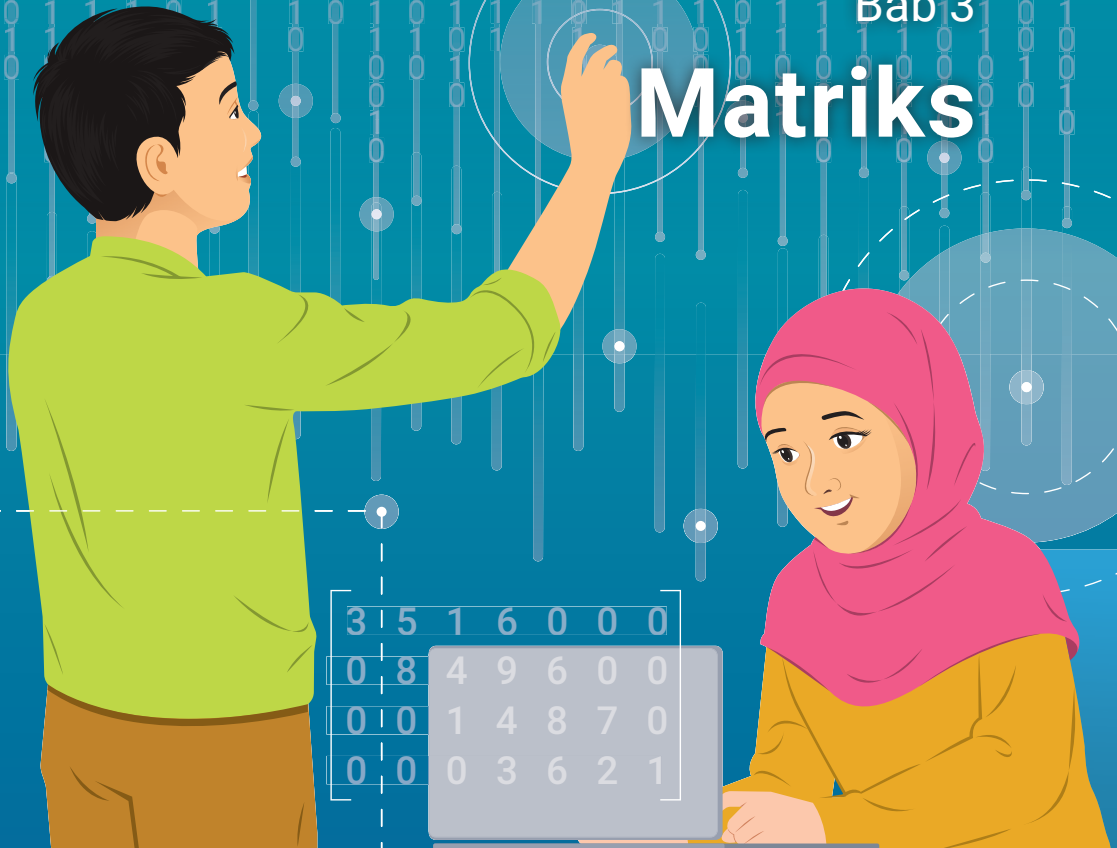
Pengayaan

- Istiqomah. 2020. *Modul Matematika Peminatan Kelas XI KD 3.4.* Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. http://penilaian.sma.kemdikbud.go.id:8063/emodulsma/detail.php?id=MTI0
  Modul ini membahas pengertian dan operasi aljabar pada polinomial, pembagian polinomial, dan persamaan polinomial.

- Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. 2017. *Aljabar dan Trigonometri*. Sanata Dharma University Press. Buku ini membahas beberapa topik terkait polinomial yang dapat dijadikan pengayaan, misalnya Aturan Descartes dan Teorema Fundamental Aljabar.

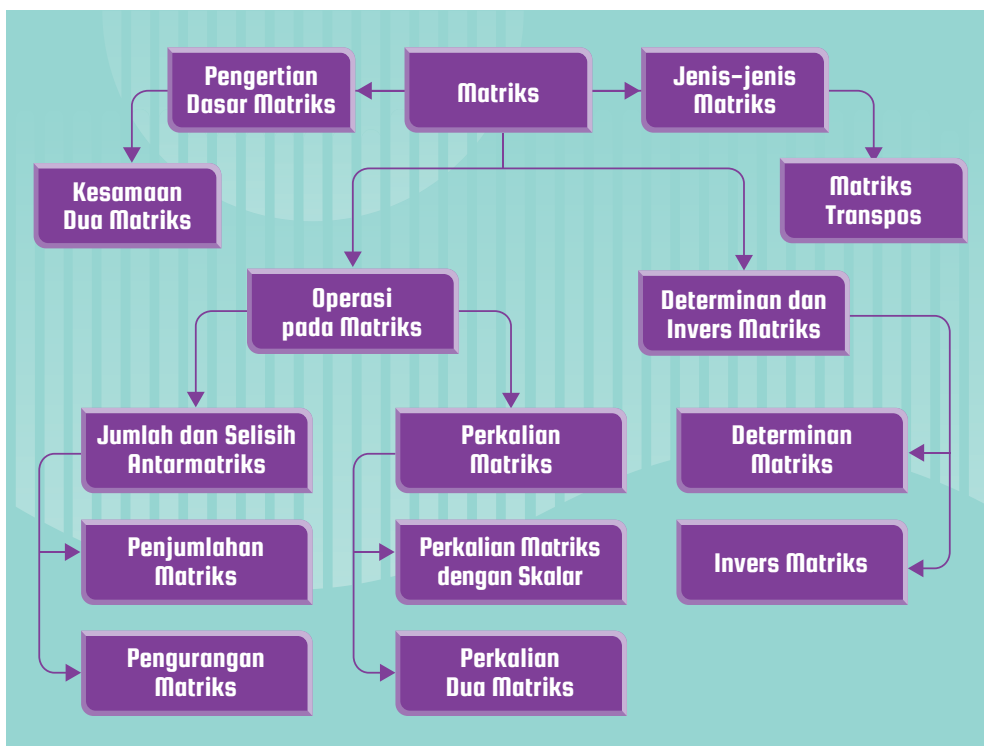
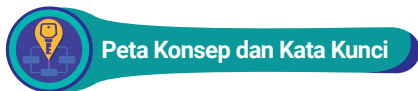
KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA, 2021
Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-770-2

Bab 3

Matriks

Pernahkah terpikir oleh kalian ketika kita mengirim pesan *WhatsApp* kepada seseorang mengapa orang lain tidak dapat menerima pesan tersebut? Apakah *WhatsApp* dapat membaca pesan yang kita kirim?

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut.

- Menentukan konsep dari matriks.
- Mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya.
- Menentukan matriks transpos.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks.
- Menjelaskan konsep operasi penjumlahan dan pengurangan dua matriks.
- Menjelaskan konsep operasi perkalian skalar dengan matriks dan perkalian dua matriks.
- Menentukan determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3.
- Menentukan invers matriks.
- Membuat model matematika dan menyelesaikan masalah kontekstual matriks.

Kata Kunci

Matriks, Matriks Transpos, Kesamaan Dua Matriks, Penjumlahan Matriks, Pengurangan Matriks, Perkalian Matriks, Determinan Matriks, Invers Matriks.

Pesan Rahasia

Gambar 3.1 Keamanan Data

Pengamanan dan kerahasiaan data merupakan salah satu hal yang sangat penting dari suatu sistem informasi. Kasus penyadapan banyak terjadi baik kasus yang terjadi pada komunikasi antar individu maupun antar negara. Hal ini sangat merugikan. Untuk mengantisipasi hal tersebut sangat dibutuhkan suatu teknik pengamanan data, salah satunya adalah teknik kriptografi. Kriptografi adalah suatu ilmu dan seni menyandikan pesan ke dalam bentuk yang tidak dapat dimengerti maknanya oleh orang lain. Kriptografi digunakan untuk menjaga keamanan pesan yang dikirim dari suatu tempat ke tempat lain. Bagaimana cara untuk membuat pesan kriptografi? Detailnya akan kalian lihat pada proyek bab ini.

Pada bab ini kita akan mempelajari materi matriks. Salah satu cara pembuatan pesan kriptografi adalah menggunakan bentuk matriks. Matriks memiliki operasi perkalian yang melibatkan beberapa elemennya sekaligus sehingga membuat penyidikan kode sulit dilakukan. Selain digunakan di kriptografi, matriks juga banyak digunakan di bidang lain dalam kehidupan sehari-hari. Tentu saja hal ini dapat kita pahami setelah mempelajari matriks. Marilah, kita belajar matriks dengan sungguh-sungguh dan semangat.

A. Menemukan Konsep Matriks

Data sangat sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Tampilan data dapat berbentuk tabel atau daftar.

Konsep Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kalian diajak untuk menemukan konsep matriks. Perhatikan informasi berikut ini.

Guru membagikan hasil ulangan harian mata pelajaran Matematika dan Bahasa Inggris kepada Aisyah, Alex, dan Wayan. Aisyah mendapat nilai 80 pada mata pelajaran Matematika dan 75 pada mata pelajaran Bahasa Inggris. Alex pada mata pelajaran Matematika mendapat nilai 70 dan pada mata pelajaran Bahasa Inggris mendapat nilai 95. Wayan memperoleh nilai Matematika tertinggi yaitu 95 sedangkan nilai Bahasa Inggris yang diperoleh Wayan adalah 75. Sajikan data tersebut ke dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Data Nilai Ulangan Peserta Didik terhadap Dua Mata Pelajaran

Nama Peserta Didik	Nilai Mata Pelajaran	
	Matematika	Bahasa Inggris
Aisyah	...	...
Alex	...	...
Wayan	...	...

Sajikan data pada Tabel 3.1 dalam bentuk baris dan kolom dengan menghilangkan judul baris dan kolom ke dalam bentuk berikut

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}, \text{ atau } \; A = \begin{Vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

Susunan bilangan pada A berbentuk .... .

Tabel 3.2. Data Absensi Peserta Didik Kelas XI dengan Rentang Waktu Satu Semester

Nama Peserta Didik	Ijin	Sakit	Tanpa Keterangan
Aisyah	2	1	0
Alex	3	1	1
Wayan	1	2	1

Sajikan data pada Tabel 3.2 dalam bentuk baris dan kolom dengan menghilangkan judul baris dan kolom ke dalam bentuk berikut

$$B=\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},\ \text{atau}\ B=\begin{Vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

Susunan bilangan pada B berbentuk .... .

Susunan bilangan yang disusun pada A dan B di atas disebut dengan matriks.

Dari matriks A dan B dapat kita peroleh ciri-ciri yaitu

....

....

....

Secara umum matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1

Matriks

Matriks adalah susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom. Kelompok bilangan tersebut ditulis di dalam kurung biasa “( )”, kurung siku “[ ]”, atau “‖ ‖” .

Catatan: Dalam buku ini, matriks dituliskan dengan menggunakan kurung siku “[ ]”.

Penamaan suatu matriks dilambangkan dengan huruf kapital, seperti *A*, *B*, *C*, *D*, ..., dan seterusnya. Bilangan-bilangan yang menyusun matriks dinamakan elemen matriks. Elemen suatu matriks biasanya dinotasikan dengan huruf kecil sesuai dengan nama matriksnya atau dapat ditulis huruf besar apabila elemen matriks tersebut juga berupa matriks.

Secara umum matriks dapat ditulis sebagai berikut

Keterangan:

$A_{m\times n}$: Matriks *A* berordo (ukuran) $m\times n$ dengan *m* menyatakan banyak baris matriks *A* dan *n* menyatakan banyak kolom matriks *A*. Bilangan *m* dan *n* adalah bilangan-bilangan asli.

a_{ij} : menyatakan elemen matriks pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dengan $i = 1,2,3,...,m$ dan $j = 1,2,3,...,n$.

Contoh 3.1

Konsep matriks

Perhatikan permasalahan berikut.

Covid-19 (*coronavirus disease* 2019) adalah jenis penyakit menular yang disebabkan oleh virus dari golongan *coronavirus*, yaitu *SARS-CoV-2* yang sering disebut virus korona. Penyebaran virus ini di Indonesia sangatlah cepat. Berdasarkan corona.jogjaprov.go.id data penambahan

kasus Covid-19 di Daerah Istimewa Yogyakarta pada tanggal 25 dan 26 Juni 2021 adalah sebagai berikut.

Tabel 3.3. Data Penambahan Kasus Covid-19 di Daerah Istimewa Yogyakarta

Waktu	Terkonfirmasi	Sembuh	Meninggal
25/06/2021	783	277	16
26/06/2021	782	233	22

Ubahlah penampilan data tersebut dalam bentuk matriks kemudian tentukan ordo dan elemen-elemen matriks tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Matriks yang terbentuk dari data tersebut adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 783 & 277 & 16 \\ 782 & 233 & 22 \end{bmatrix}$$

Matriks A terdiri atas 2 baris dan 3 kolom matriks. A dikatakan berordo atau berukuran 2×3 dan ditulis sebagai $A_{2\times3}$. Misalkan elemen-elemen pada matrik A di atas dinyatakan dengan a_{ij} yang berarti elemen matriks A terletak pada baris i dan kolom j sehingga matriks A dapat ditulis sebagai berikut.

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

dengan demikian elemen-elemen pada contoh tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

- $a_{11} = 783$
- $a_{12} = 277$
- $a_{13} = 16$
- $a_{21} = 782$
- $a_{22} = 233$
- $a_{23} = 22$

Tabel berikut menunjukkan data banyak hewan ternak yang dimiliki beberapa warga di suatu desa.

Tabel 3.4. Data Banyak Hewan Ternak.

Nama	Ayam	Bebek	Kambing	Sapi
Andi	6	15	5	0
Isogi	9	10	2	1
Nadivah	0	9	0	1
Rakha	12	6	0	2

a. Nyatakan data tersebut dalam bentuk matriks.

b. Tentukan ordo matriksnya.

c. Tentukan elemen a_{23} dan a_{13}

Mari Berkolaborasi

Asupan gizi bagi atlet sangatlah penting. Asupan gizi diperlukan untuk penyediaan energi tubuh saat seorang atlet melakukan berbagai aktivitas fisik misalnya pada saat latihan, bertanding, dan pemulihan baik setelah latihan maupun bertanding. Berdasarkan interaktif.kompas.id perkiraan kebutuhan minimal energi pada atlet renang putra pada usia 11-12 tahun untuk kebutuhan normal adalah 2000 kalori, jika ditambah 1 jam latihan menjadi 2200 kalori, dan 2500 kalori apabila ditambah 2 jam latihan. Pada usia 13-14 tahun untuk kebutuhan normal dibutuhkan 2200 kalori, jika ditambah 1 jam latihan menjadi 2500 kalori, dan 3000 kalori apabila ditambah 2 jam latihan. Pada usia 15-18 tahun untuk kebutuhan normal dibutuhkan 2600 kalori, jika ditambah 1 jam latihan menjadi 2900 kalori, dan 3200 kalori apabila ditambah 2 jam latihan. Pada usia 19-25 tahun untuk kebutuhan normal dibutuhkan 2700 kalori, jika ditambah 1 jam latihan menjadi 3000 kalori, dan 3300 kalori apabila ditambah 2 jam latihan.

Jawablah pertanyaan berikut!

a). Sajikan data tersebut dalam bentuk tabel.

b). Tuliskanlah kelompok bilangan pada tabel tersebut ke dalam bentuk matriks dengan nama matriks *A*!

c). Tentukan banyak baris dan kolom pada matriks yang diperoleh pada soal b.

d). Sebutkan elemen pada baris kedua!

e). Sebutkan elemen pada kolom ketiga!

f). Sebutkan elemen a_{12}, a_{23}, dan a_{33}!

g). Diskusikan hasil jawaban kalian dengan teman-teman. Tuliskan perbedaannya!

Konsep Matriks

Kerjakan latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Matriks adalah susunan bilangan di dalam kurung siku saja.
2. *Benar atau salah.* Elemen suatu matriks dapat ditulis dengan huruf besar.
3. *Benar atau salah.* Banyak elemen pada matriks A merupakan hasil perkalian antara banyak baris dengan banyak kolom pada matriks A.

Penerapan Konsep

4. Jika $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & -5 \\ 7 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukan:

   a). ordo matriks P

   b). elemen-elemen baris ke-3

   c). $-p_{21} + \left(p_{33} - p_{24}\right)^2$

5. Daging hewan ayam, bebek, kambing, dan sapi merupakan sumber protein yang baik. Selain itu, daging hewan tersebut juga mengandung lemak dan menghasilkan kalori. Berdasarkan eatjoy.co.id, setiap 100 gram daging ayam mengandung lemak 25g; protein 18,2g; dan kalori 302 kal. Daging bebek mengandung lemak 28,6g; protein 16g, dan kalori 326 kal. Daging kambing mengandung protein dan lemak masing-masing 9,2g serta kalori 154 kal. Daging sapi mengandung protein dan lemak masing-masing 14g serta kalori 207 kal. Sajikan data tersebut dalam bentuk matriks, tentukan ordo dan sebutkan elemen matriknya.

B. Jenis-Jenis Matriks

Berikut merupakan jenis-jenis matriks yang perlu kalian ketahui.

1. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang berordo $1 \times n$. Matriks baris terdiri dari satu baris dan memuat n elemen. Berikut ini adalah contoh matriks baris.

$A_{1\times2} = \begin{bmatrix} 85 & 70 \end{bmatrix}$, matriks baris yang berordo 1×2.

$B_{1\times5} = \begin{bmatrix} 65 & 60 & 90 & 95 & 80 \end{bmatrix}$, matriks baris yang berordo 1×5.

2. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang berordo $m\times1$. Matriks kolom terdiri dari satu kolom dan memuat m elemen. Berikut ini adalah contoh matriks kolom.

$A_{2\times1} = \begin{bmatrix} 68 \\ 79 \end{bmatrix}$, matriks kolom yang berordo 2×1.

$B_{3\times1} = \begin{bmatrix} 70 \\ 68 \\ 92 \end{bmatrix}$, matriks kolom yang berordo 3×1.

3. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang berordo $m\times n$ dengan nilai $m=n$. Berikut ini adalah contoh matriks persegi.

$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 21 & 11 \\ 32 & 25 \end{bmatrix}$, matriks persegi yang berordo 2×2.

$B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 21 & 11 & 12 \\ 10 & 27 & 31 \\ 19 & 17 & 27 \end{bmatrix}$, matriks persegi yang berordo 3×3.

Perhatikan matriks persegi berordo $n\times n$ di bawah ini.

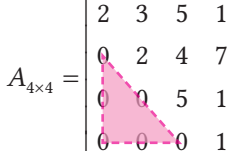
$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

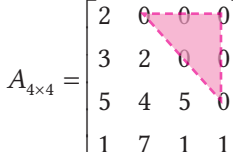
Diagonal samping matriks A

Diagonal utama matriks A

Dalam matriks persegi, elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{11} dengan elemen a_{nn} disebut dengan diagonal utama matriks, sedangkan elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{1n} dengan elemen a_{n1} disebut dengan diagonal samping.

4. **Matriks Datar dan Matriks Tegak**

Matriks tegak adalah matriks yang berordo $m \times n$ dengan nilai $m > n$ yang berarti banyak baris lebih banyak dari pada banyak kolom. Matriks datar adalah matriks yang berordo $m \times n$ dengan nilai $m < n$ yang berarti banyak kolom lebih banyak dari pada banyak baris. Matriks datar dan matriks tegak biasanya juga sering disebut matriks persegi panjang. Berikut ini adalah contoh matriks datar dan matriks tegak.

$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 24 & 11 \\ 9 & 21 \\ 15 & 17 \end{bmatrix}$, matriks tegak yang berordo 3×2

$B_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, matriks datar yang berordo 3×4

5. **Matriks Segitiga**

Matriks segitiga adalah matriks persegi dengan elemen-elemen matriks yang berada di bawah diagonal utama atau di atas diagonal utama semua bernilai nol. Matriks segitiga ada dua macam yaitu.

a). Matriks segitiga atas adalah matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama semuanya bernilai nol.

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b). Matriks segitiga bawah adalah matriks yang elemen-elemen di atas diagonal utama semuanya bernilai nol.

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Diagonal

Perhatikan matriks persegi berikut ini.

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

Matriks persegi di atas semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama. Matriks seperti ini disebut dengan matriks diagonal.

7. Matriks Identitas

Mari perhatikan matriks diagonal berikut ini.

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya satu disebut dengan matriks identitas.

8. Matriks Nol

Perhatikan matriks berikut ini.

$$O_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_{1\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks O tersebut semua elemennya bernilai nol. Matriks seperti ini dinamakan dengan matriks nol.

9. Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang letaknya simetris terhadap diagonal utama bernilai sama. Dengan kata lain, elemen a_{ij} sama dengan elemen a_{ji} dengan $i \neq j$. Berikut ini contoh matriks simetris.

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Matriks Transpos

Untuk memahami matriks tranpos kita perhatikan permasalahan berikut.

Kedisiplinan kehadiran dari peserta didik merupakan hal terpenting untuk kesuksesan kegiatan belajar mengajar. Berikut ini adalah data rekapan absensi kehadiran peserta didik setiap kelas di suatu SMA.

Tabel 3.5. Data Rekapan Absensi Peserta Didik Setiap Kelas di SMA dengan Rentang Waktu Satu Semester.

Keterangan \ Kelas	X MIPA 1	X MIPA 2	X IPS	XI MIPA 1	XI MIPA 2	XI IPS	XII MIPA 1	XII MIPA 2	XII IPS
Ijin	5	3	2	1	0	3	1	1	3
Sakit	1	4	0	1	1	3	2	1	3
Tanpa keterangan	0	2	2	0	3	2	5	1	2

Data tersebut dicetak pada kertas secara *landscape*.

Jika data tersebut direpresentasikan ke dalam matriks akan diperoleh matriks berikut ini.

$$D_{3\times 9} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena untuk keperluan laporan maka Kepala Sekolah SMA Makmur menghendaki data tersebut dicetak dalam kertas secara *portrait*. Agar tampilannya rapi maka matriks $D_{3\times 9}$ berubah menjadi matriks $D_{9\times 3}$ sebagai berikut.

$$D_{9\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Dari permasalahan tersebut dapat kita peroleh bahwa matriks $D_{9\times3}$ merupakan transpos dari matriks $D_{3\times9}$. Matriks transpos adalah matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris. Matriks transpos D dinotasikan dengan D^T atau D^t.

Contoh 3.2

Matriks Transpos

Jika $C=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ merupakan matriks kolom, maka transpos matriks C adalah matriks baris $C^t=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}$

Jika $D=\begin{bmatrix}-7 & 8 & 1 & 3\\5 & 9 & 7 & 2\\2 & 2 & 1 & 3\\1 & -6 & 0 & 1\end{bmatrix}$ merupakan matriks persegi, maka transpos matriks D adalah $D^t=\begin{bmatrix}-7 & 5 & 2 & 1\\8 & 9 & 2 & -6\\1 & 7 & 1 & 0\\3 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ yang juga merupakan matriks persegi.

Tentukan transpos dan jenis matriks berikut.

a. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5\end{bmatrix}$ b. $B=\begin{bmatrix}9 & -1\\3 & 0\\1 & 5\end{bmatrix}$ c. $C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 6 & -2\\4 & 5 & -7\end{bmatrix}$

Padi merupakan salah satu tanaman pangan yang memegang peran penting bagi perekonomian di Indonesia. Terkadang padi yang akan dipanen mengalami gangguan yang mengakibatkan penurunan hasil atau bisa

disebut gagal panen. Hal ini dapat disebabkan oleh beberapa faktor seperti kekeringan, banjir, dan hama. Berikut ini adalah data luas lahan tanaman padi yang mengalami gagal panen.

Tabel 3.6. Data Luas Lahan Tanaman Padi (dalam ha) yang Gagal Panen Menurut Penyebabnya.

Kabupaten	Kekeringan	Banjir	Hama
Pacitan	0	375	699
Ponorogo	27	991	321
Blitar	0	101	0
Kediri	327	12	0
Malang	0	0	2237
Jember	19	0	36

a. Pilih data dari Tabel 3.6. agar dapat membentuk matriks segitiga berordo 3×3.

b. Buatlah transpos dari matriks yang kalian buat!

c. Apa simpulan yang dapat kalian ambil berdasarkan jawaban a) dan b)? Jelaskan!

Jenis-jenis Matriks

Kerjakan latihan berikut dengan tepat dan benar.

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Matriks tegak merupakan bagian dari matriks persegi panjang.
2. *Benar atau salah.* Jika matriks A adalah matriks diagonal, maka matriks A adalah matriks segitiga.
3. *Benar atau salah.* Jika matriks I adalah matriks simetris, maka matriks I adalah matriks identitas.
4. *Benar atau salah.* Transpos dari matriks baris adalah matriks kolom.

Penerapan Konsep

5. Tentukan jenis matriks-matriks berikut.

   a). $A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$ b). $B=\begin{bmatrix}2 & 9 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ c). $C=\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6. Jika diketahui matriks $A=\begin{bmatrix}7 & -1 & 3\\ -1 & 9 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ dan A^t merupakan transpos matriks A, maka tentukan jenis matriks A dan jenis matriks A^t.
7. Jika matriks I adalah matriks identitas, maka matriks I adalah matriks diagonal. Berikan penjelasan tentang kebenaran pernyataan tersebut.

C. Kesamaan Dua Matriks

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari kesamaan dua matriks. Untuk itu, mari bersiap melakukannya dengan mengerjakan aktivitas eksplorasi berikut ini.

Kesamaan Dua Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini kalian diajak untuk menemukan konsep kesamaan dua matriks. Perhatikan permasalahan berikut.

Matriks berikut menunjukkan harga jual kue di Toko A.

$$\begin{bmatrix}44000 & 71000 & 53000\\ 38000 & 52000 & 43000\\ 33000 & 45000 & 38000\end{bmatrix}$$

Baris-barisnya secara berturut-turut menunjukkan ukuran kue kotak besar, kotak sedang dan kotak kecil. Kolom pertama menunjukkan harga kue bika Ambon, kolom kedua menunjukkan harga kue lapis legit, dan kolom ketiga menunjukkan harga kue bolu pandan. Toko B menjual macam kue yang sama dengan toko A. Selain itu ukuran dan harganya pun juga sama. Sajikan data Toko A ke dalam matriks A dan data Toko B ke dalam matriks B. Amatilah kedua matriks tersebut. Menurut kalian apakah matriks A dan B

sama? Apakah kedua matriks tersebut memiliki ordo yang sama? Bagaimana keterkaitan elemen-elemen seletak dari matriks A dan B? Berikanlah simpulan dari pengamatan kalian.

Dari permasalahan tersebut kita dapat menentukan konsep kesamaan dua matriks sebagai berikut.

Definisi 3.2

Kesamaan Dua Matriks

Matriks A dan B dikatakan sama, dinyatakan sebagai $A = B$, jika dan hanya jika

a). matriks A dan matriks B mempunyai ordo yang sama

b). semua elemen-elemen yang seletak pada matriks A dan B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh 3.3

Kesamaan Dua Matriks

Diketahui matriks A dan matriks B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -x & 2 \\ -3y & z^2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Jika matriks A sama dengan B maka tentukan nilai x, y, dan z.

Alternatif Penyelesaian

- Matriks A dan B berordo sama yaitu 2×2 berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi
- Syarat kedua kesamaan matriks A dan B adalah semua elemen-elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama, sehingga diperoleh sebagai berikut.
  - $-x = -1$ maka $x = 1$
  - $-3y = 6$ maka $y = -2$
  - $z^2 = 9$ maka $z = \pm 3$

  Jadi nilai $x = 1$, $y = -2$, dan $z = \pm 3$.

Diketahui matriks A dan matriks B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & b+3 \\ d-5 & -b-3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 7c & 3a-1 \\ 2a+1 & -5c \end{bmatrix}$$

Jika matriks A sama dengan B maka tentukan nilai $a+b+c+d$.

Kerjakan latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

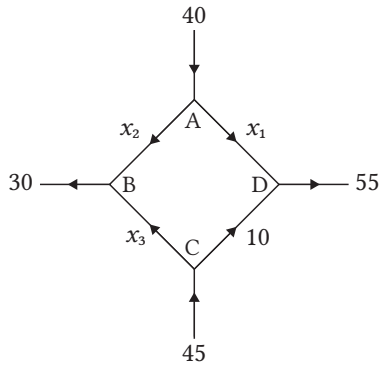
1. *Benar atau salah.* Dua matriks yang mempunyai ordo yang sama merupakan salah satu syarat dua matriks yang sama.
2. *Benar atau salah.* Dua matriks yang sama selalu memiliki ordo yang sama.
3. *Benar atau salah.* Jika diketahui matriks $R = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka matriks R sama dengan matriks C.

Penerapan Konsep

4. Jika $A = \begin{bmatrix} -x-3y & 0 \\ (x-2y)^2 & 1 \end{bmatrix}$ dan I adalah matriks identitas berordo 2×2 dimana

   $A = 1$, maka tentukan nilai $x + y$.
5. Hitunglah nilai $a+b+c+d$ yang memenuhi kesamaan matriks

   $$\begin{bmatrix} a+2b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

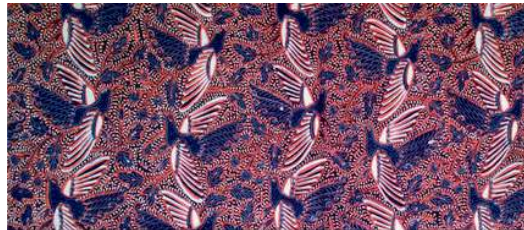
6. Aplikasi matriks dalam bidang komputer.

Gambar 3.2 Jaringan komputer

Gambar 3.2 menunjukan jaringan komputer dengan 4 node, laju aliran dan arah aliran di cabang-cabang tertentu diketahui. Jika disajikan dalam matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + 10 \\ x_1 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

dengan baris matriks secara berturut-turut menunjukkan node *A*, *B*, *C*, dan *D*. Tentukan laju aliran x_1, x_2, dan x_3.

D. Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

1. Penjumlahan Matriks

Batik Emprit

Gambar 3.3 Batik *Emprit*
Sumber: bbkb.kemenperin.go.id/ (2021)

Burung *emprit* (Jawa) atau burung pipit merupakan burung yang tidak pernah lepas dari kelompoknya. Meskipun burung *emprit* berbadan kecil, namun mampu bertahan menghadapi dunia yang luas karena mereka selalu hidup berkelompok.

Motif batik burung *emprit* ini menyampaikan pesan agar manusia belajar dari alam dan sekitarnya, bahwa sebagai makhluk sosial kita harus menjaga hubungan baik dengan sesama.

Tahukah kalian bahwa proses produksi batik dapat dijelaskan dengan penjumlahan matriks?

Sebelum kalian melihat definisi formal dari penjumlahan matriks, kerjakan kegiatan eksplorasi berikut.

Melalui kegiatan eksplorasi ini kalian diajak untuk menemukan konsep penjumlahan matriks. Perhatikan permasalahan berikut.

Batik telah menjadi bagian dari budaya Indonesia. Berikut ini adalah data biaya bahan dasar dan data tenaga kerja di sebuah perusahaan industri kerajianan batik pada bulan Januari.

Tabel 3.7. Data Biaya Bahan Dasar (dalam juta rupiah)

	Batik Handprint	Batik Cap	Batik Tulis
Kualitas I	23	45	82
Kualitas II	16	32	60

Tabel 3.8. Data Biaya Tenaga Kerja (dalam juta rupiah)

	Batik Handprint	Batik Cap	Batik Tulis
Kualitas I	8	10	15
Kualitas II	6	8	14

Dengan menggunakan konsep matriks biaya produksi dapat diperoleh dengan langkah-langkah berikut.

a. Buatlah matriks biaya bahan dasar dan matriks biaya tenaga kerja!
b. Tentukan matriks biaya produksi yang merupakan penjumlahan dari biaya pembelian bahan dasar dan biaya tenaga kerja!
c. Interpretasikan setiap elemen matriks biaya produksi!
d. Apabila pada matriks biaya bahan dasar data batik tulis dihapus, apakah matriks biaya produksi dapat dihitung? Berikan alasanmu!

Dari permasalahan tersebut, tulislah yang kalian ketahui dari penjumlahan matriks.

Dari kegiatan ekplorasi yang telah kalian lakukan, definisi penjumlahan matriks dapat ditulis sebagai berikut.

Definisi 3.3

Penjumlahan Matriks

Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}, maka ada matriks C yang merupakan hasil penjumlahan matriks A dengan matriks B atau $C = A + B$. Matriks C juga berodo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Contoh 3.4

Penjumlahan Matriks

Diketahui matriks-matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan jumlah matriks A dan matriks B.

Alternatif Penyelesaian

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+(-1) & 9+(-3) \\ 3+(-1) & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi jumlah matriks A dan matriks B adalah $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Tentukan hasil penjumlahan matriks $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini kalian diajak untuk menemukan sifat-sifat penjumlahan matriks.

Diketahui matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \text{dan}\ \ C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Hitunglah $A + B$ dan $B + A$, dugaan apa yang kalian buat?

b. Tentukan $(A + B) + C$ dan $A + (B + C)$. Apa yang dapat kalian peroleh?

c. Jika ada matriks O yang merupakan matriks nol maka tentukan $A + O$ dan $O + A$. Sifat apa yang dapat kalian dapatkan?

d. Jika matriks $-A$ merupakan lawan dari matriks A, $-A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ maka tentukan penjumlahan matriks A dan matriks $-A$. Apa yang dapat kalian peroleh dari menjumlahkan kedua matriks tersebut?

Berdasarkan kegiatan eksplorasi yang kalian lakukan, dapat diperoleh sifat-sifat penjumlahan matriks sebagai berikut.

Sifat 3.1

Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks

Misalkan matriks A, B, C, dan O merupakan matriks-matriks yang berordo sama, maka dalam penjumlahan matriks

- Bersifat Komutatif : $A + B = B + A$
- Bersifat Asosiatif : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Terdapat sebuah matriks identitas yaitu matriks O yang bersifat
  $A + O = O + A = A$
- Matriks A mempunyai lawan yaitu $-A$ yang bersifat $A + (-A) = O$

2. Pengurangan Matriks

Rumusan penjumlahan matriks dapat kita terapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks.

Definisi 3.4

Pengurangan Matriks

Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ maka pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks B. Ditulis sebagai berikut.

$$A - B = A + (-B)$$

Contoh 3.5

Pengurangan matriks

Diketahui matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \text{dan } C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan pengurangan matriks:

a). $A - B$

b). $A - C$

Alternatif Penyelesaian

a). $-B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b). Matriks A dan C berordo tak sama, dengan demikian $A - C$ tidak terdefinisi.

Diketahui matriks-matriks $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ maka tentukan $P - Q$.

Berdasarkan Contoh 3.5 jelas bahwa pengurangan matriks A dan B adalah dengan cara mengurangkan elemen-elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak. Definisi pengurangan matriks dapat pula dituliskan sebagai berikut.

Definisi 3.5

Pengurangan matriks

Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}, maka ada matriks C yang merupakan hasil pengurangan dari matriks A dengan matriks B atau $C = A - B$. Matriks C juga berodo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (untuk semua i dan j)

Contoh 3.6

Pengurangan Matriks

Diketahui matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 9 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$ dan, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ maka tentukan $A - B$.

Alternatif Penyelesaian

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 9 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-3 & 9-0 \\ 2-2 & 9-(-5) \\ 8-2 & -7-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 14 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

Diketahui matriks-matriks

$$P = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika X adalah matriks berordo 3×3 dan $X + P = Q$, maka tentukan matriks X.

Apakah sifat-sifat operasi penjumlahan matriks pada Sifat 3.1 berlaku untuk operasi pengurangan matriks? Berikan alasan!

Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

Kerjakan latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Operasi penjumlahan matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan elemen-elemen matriks A dan elemen-elemen matriks B saja.
2. *Benar atau salah.* Dua buah matriks dapat dikurangkan apabila matriks tersebut memiliki ordo yang sama.
3. *Benar atau salah.* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$.

Penerapan Konsep

4. Diketahui matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} {}^{3}\log 27 & 0 \\ 0 & {}^{7}\log 21 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} {}^{3}\log 81 & 1 \\ -1 & {}^{7}\log 3 \end{bmatrix}. \text{ Tentukan } A-B.$$

5. Tentukan nilai x, y, dan z yang memenuhi:

$$\begin{bmatrix} 2x & y \\ 3z & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -x \\ 2y & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = O, \text{ dengan } O \text{ adalah matriks nol berordo } 2 \times 2.$$

E. Perkalian Matriks

1. Perkalian Matriks dengan Skalar

Kalian sudah mempelajari penjumlahan matriks. Konsep penjumlahan berulang pada aljabar akan digunakan dalam matriks. Mari, kita lakukan kegiatan eksplorasi berikut.

Perkalian Matriks dengan Skalar

Melalui kegiatan eksplorasi kalian diajak untuk menemukan konsep perkalian matriks dengan skalar. Konsep penjumlahan berulang pada aljabar akan digunakan dalam matriks.

Perhatikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan aturan penjumlahan matriks dapat diperoleh

$$A + A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots + \dots & \dots + \dots \\ \dots + \dots & \dots + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times \dots & 2 \times \dots \\ 2 \times \dots & 2 \times \dots \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = 2 \times \dots$$

$$A + A + A = \dots$$

Apabila penjumlahan matriks A sampai k kali maka diperoleh $\underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{k \text{ kali penjumlahan matriks } A} = \dots$

Dari langkah-langkah di atas jelaskan yang kalian ketahui dari perkalian matriks dengan skalar.

Dari kegiatan ekplorasi yang telah kalian lakukan, definisi perkalian matriks dengan skalar dapat diungkapkan sebagai berikut.

Definisi 3.6

Perkalian Matriks dengan Skalar

Jika matriks A adalah matriks yang berordo $m \times n$ dan k adalah bilangan real (k sering disebut skalar), maka kA menyatakan matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen pada matriks A dengan k.

Contoh 3.7

Perkalian Matriks dengan Skalar

Misalkan $P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -6 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, tentukan $2P$.

Alternatif Penyelesaian

$$2P = 2\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -6 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1) & 2\times\frac{1}{4} & 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 2\times(-6) & 2\times 1 & 2\times(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -12 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Jika $Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ dan $k = 4$, maka tentukan kQ.

Sifat 3.2

Sifat-Sifat Perkalian Matriks dengan Skalar

Misalkan matriks A dan B merupakan matriks-matriks yang berordo sama, serta k dan h merupakan skalar, maka memenuhi ketentuan berikut.

$kO = O$, dengan O adalah matriks nol

$kA = O$, untuk $k = 0$

Bersifat Asosiatif : $h(kA) = (hk)A$

Bersifat Distributif : $(h \pm k)A = hA \pm kA$

Bersifat Distributif : $k(A \pm B) = (kA) \pm (kB)$

2. Perkalian Dua Matriks

Perkalian Dua Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini kalian diajak untuk menemukan konsep perkalian dua matriks. Perhatikan permasalahan berikut.

Sebuah perusahaan yang bergerak di bidang konstruksi memiliki beberapa kontrak pekerjaan di tiga lokasi yang berbeda yaitu di Kota Pontianak, Kota Surabaya, dan Kota Makasar. Berikut ini disajikan data banyaknya karyawan pada perusahaan di tiga lokasi tersebut.

Tabel 3.9 Data Banyak Karyawan

Lokasi	Karyawan Tetap	Karyawan Paruh Waktu
Kota Pontianak	450	120
Kota Surabaya	380	140
Kota Makasar	420	87

Besar gaji per hari untuk karyawan tetap adalah Rp125.000,00 sedangkan untuk karyawan paruh waktu Rp80.000,00. Dengan menggunakan konsep matriks dana yang harus dikeluarkan perusahaan di setiap harinya pada setiap lokasi dapat diperoleh sebagai berikut.

Misalkan data banyak karyawan menjadi matriks A dan besar gaji karyawan (dalam ribu rupiah) menjadi matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Dana yang harus dikeluarkan perusahaan tersebut dinyatakan ke dalam matriks dengan mengalikan matriks A dengan matriks B.

$$AB = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \times \dots + \dots \times \dots \\ \dots \times \dots + \dots \times .. \\ \dots \times \dots + \dots \times .. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

a. Interpretasikan setiap elemen matriks hasil perkalian matriks diatas.
b. Perhatikan ordo matriks A, ordo matriks B, dan ordo matriks AB. Dugaan apa yang dapat kalian buat?
c. Apabila salah satu kolom pada matriks A dihilangkan apakah perkalian matriks A dengan matriks B dapat dilakukan? Jelaskan.
d. Dari permasalahan tersebut, tulislah simpulan yang kalian ketahui dari perkalian dua matriks.

Dari kegiatan ekplorasi yang telah kalian lakukan, definisi perkalian dua matriks dapat diungkapkan sebagai berikut.

Definisi 3.7

Perkalian Dua Matriks

Jika matriks A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times p$ maka ada matriks C yang merupakan hasil perkalian matriks A dengan matriks B atau $C = AB$. Matriks C berordo $m \times p$ dan elemen-elemen c_{ij} dihitung dengan cara mengalikan elemen baris ke-i pada matriks A terhadap elemen kolom ke-j pada matriks B, kemudian ditambahkan hasilnya.

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \cdots + a_{in}.b_{nj}$$

Contoh 3.8

Perkalian Dua Matriks

Jika $A = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan matriks AB dan matriks BA.

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} -7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7(1)+2(-1)+(-2)(2) & -7(2)+2(3)+(-2)(0) \\ 1(1)+0(-1)+(-1)(2) & 1(2)+0(3)+(-1)(0) \\ 2(1)+3(-1)+(-1)(2) & 2(2)+3(3)+(-1)(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7+(-2)+(-4) & -14+6+0 \\ 1+0+(-2) & 2+0+0 \\ 2+(-3)+(-2) & 4+9+0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -13 & -8 \\ -1 & 2 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

matriks BA tidak terdefinisi karena banyak kolom pada matriks B tidak sama dengan banyak baris pada matriks A.

Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan matriks CD dan matriks DC.

Di sebuah industri rumah tangga memproduksi makanan kripik tempe, kripik pisang, dan kripik kentang. Makanan tersebut dipasarkan ke tiga tempat yaitu tempat A, B, dan C. Banyaknya kripik (dalam toples) disajikan pada matriks P berikut. Kolom dalam matriks P tersebut berturut-turut menunjukkan tempat A, tempat B dan tempat C sedangkan baris-barisnya secara berturut-turut menunjukkan kripik tempe, kripik pisang, dan kripik kentang.

$$P = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 20 \\ 25 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

Harga untuk setiap toples keripik (dalam rupiah) dinyatakan dalam matriks berikut.

$$Q = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 15.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{kripik tempe} \\ \text{kripik pisang} \\ \text{kripik kentang} \end{matrix}$$

a. Tentukan matriks PQ.

b. Apakah matriks PQ merupakan matriks pendapatan untuk setiap tempat? Apabila iya, interpretasikan setiap elemen matriks tersebut namun apabila tidak carilah solusi agar menemukan matriks pendapatan untuk setiap tempat.

Sifat 3.3

Sifat-Sifat Perkalian Dua Matriks

Berikut ini merupakan sifat-sifat perkalian dua matriks.

Misalkan matriks A, B, C, dan I merupakan matriks-matriks yang berordo sama, I merupakan matriks identitas, maka memenuhi ketentuan berikut.

Bersifat Asosiatif : $(AB)C = A(BC)$

Identitas : $AI = IA = A$

Distributif : $A(B \pm C) = AB \pm AC$ atau $(A \pm B)C = AC \pm BC$

Mari Berpikir Kritis

Apakah perkalian dua matriks bersifat komutatif? Jelaskan.

Kalian telah mempelajai tentang bilangan kompleks di Bab 1. Mungkin ada di antara kalian berfikir pendefinisian bilangan kompleks terlalu dibuat buat, mulai dari pendefinisian sesuatu yang tidak ada yakni $i = \sqrt{-1}$. Pada kegiatan berpikir kreatif berikut, kalian akan melihat bahwa sistem pada bilangan kompleks yakni tentang $i^2 = -1$ dapat di analogikan dengan menggunakan konsep operasi matriks.

Mari Berpikir Kreatif

Jika diketahui $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$ dan $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i$, dengan menggunakan operasi penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar maka buktikan:

a. $\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 + ib_1$ b. $\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_2 + ib_2$

dengan menggunakan $\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 + ib_1$ dan $\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_2 + ib_2$, buktikan:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Perkalian Matriks

Kerjakan latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Misalkan k adalah skalar dan A adalah matriks berordo $m \times n$, maka kA juga berordo $m \times n$.
2. *Benar atau salah.* Jika matriks A dan B berordo sama, dengan A adalah matriks nol dan B adalah sembarang matriks maka AB juga matriks nol.
3. *Benar atau salah.* Tidak ada matriks yang memenuhi sifa A bukan matriks nol dan $AA=A$.

Penerapan Konsep

4. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, dan X matriks berordo 2×2 yang memenuhi persamaan $P - 2X = 3Q$. Tentukan matriks X.
5. Diketahui $\begin{bmatrix} x-2 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan nilai $x + y$.
6. **Ekonomi.** Tata, Putri, dan Qaila menabung di Bank bersama-sama. Matriks besarnya tabungan mereka (dalam rupiah) adalah:

   $\begin{bmatrix} 2.000.000 \\ 3.500.000 \\ 4.000.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Tata} \\ \text{Putri} \\ \text{Qaila} \end{matrix}$

   Apabila suku bunga tunggal 6% per tahun. Tentukan matriks besarnya bunga tabungan (dalam rupiah).
7. **Ekonomi.** Sebuah toko kue kering memiliki dua cabang yaitu di Yogyakarta dan di Jakarta. Berikut ini adalah matriks banyaknya kue (dalam toples) dengan kolom-kolom matriks berturut-turut menyatakan kue putri salju, kue nastar, dan kue sagu.

   $\begin{bmatrix} 23 & 22 & 17 \\ 27 & 20 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Yogyakarta} \\ \text{Jakarta} \end{matrix}$

   Harga kue putri salju tiap toples adalah Rp40.000,00; kue nastar Rp30.000,00; dan harga kue sagu Rp27.000,00. Dengan konsep perkalian

matriks tentukan pendapatan di setiap cabang toko kue apabila semua kue terjual.

F. Determinan dan Invers Matriks

1. Determinan Matriks

Konsep determinan matriks ada kaitannya dengan penyelesaian sistem persamaan linear. Kita perhatikan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Solusi umum dari sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) tersebut dapat ditunjukkan berikut ini.

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \text{ dan } y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \text{, dengan } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \text{ .}$$

Perhatikan bahwa kedua pecahan sebelumnya memiliki penyebut yang sama yaitu $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ yang disebut sebagai determinan matriks *A*.

Definisi 3.8

Determinan matriks

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks *A* dapat dinyatakan

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Dari Definisi 3.8., penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dapat ditentukan dengan menggunakan matriks sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Nilai x dan y dapat ditentukan

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \text{ dengan } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \text{ dan } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah himpunan yang memuat pasangan berurutan (x , y).

Contoh 3.9

Determinan Matriks berordo 2 × 2

1. Tentukan nilai determinan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$.
2. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$.

Alternatif Penyelesaian

1. $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \times (-5) - (-7) \times 3 = 26$.
2. Bentuk matriks dari SPLDV di atas adalah $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$.

   Nilai x dan y adalah sebagai berikut.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{(7 \times (-4)) - (14 \times (-1))}{(2 \times (-4)) - (1 \times (-1))} = \frac{-28 + 14}{-8 + 1} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{(2 \times 14) - (1 \times 7)}{(2 \times (-4)) - (1 \times (-1))} = \frac{28 - 7}{-8 + 1} = \frac{21}{-7} = -3$$

   Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$ adalah himpunan yang memuat pasangan berurutan $(2, -3)$.

1. Diketahui matriks $M=\begin{bmatrix} 9 & x \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$ dan $\det M = 9$, tentukan nilai x.
2. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$.

a. Metode Sarrus

Bagaimana cara menentukan determinan matriks berordo 3×3?

Perhitungan determinan matriks berordo 3×3 merupakan pengembangan dari perhitungan determinan matriks berordo 2×2. Ingat, Definisi 3.8 determinan matriks berordo 2×2 dapat kalian amati sebagai berikut.

Misalnya $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka determinan matriks A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(−)

(+)

Metode ini disebut **Metode Sarrus**.

Untuk menentukan determinan matriks berordo 3×3 dengan metode Sarrus, caranya adalah dengan menyalin elemen-elemen pada kolom pertama dan kedua dari matriks tersebut ke sebelah kanan. Setelah itu, determinan matriks berordo 3×3 diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan dari hasil perhitungan enam diagonal (elemen tiap diagonal dikalikan dahulu), seperti yang ditunjukkan berikut ini.

Misalnya $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka determinan matriks A:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Catatan: Metode Sarrus hanya dapat digunakan untuk menentukan determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3.

b. Metode Ekspansi Kofaktor

Metode ekspansi kofaktor digunakan untuk menentukan determinan berordo lebih dari 2×2.

Definisi 3.9

Minor dan Kofaktor Matriks

Jika A adalah sebuah matriks persegi maka minor elemen a_{ij} dinotasikan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari sebuah matriks yang diperoleh setelah baris ke-i dan kolom ke-j matriks A dihilangkan. Kofaktor elemen baris ke-i dan kolom ke-j adalah $k_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Untuk memahami minor dan kofaktor, perhatikan penjelasan berikut. Misalkan A adalah matriks berordo 3×3, minor a_{22} diperoleh dengan menghilangkan elemen pada baris kedua dan kolom kedua.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{maka } M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dihilangkan baris kedua dan kolom kedua

Kofaktor elemen a_{22} adalah $k_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$

Kofaktor elemen a_{23} adalah $k_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$

Matriks kofaktor A

$$K(A) = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}$$

Setelah kita mempelajari kofaktor dan minor di atas determinan matriks dengan ekspansi kofaktor dan minor dapat di tentukan dengan definisi berikut.

Definisi 3.10

Determinan Matriks Metode Ekspansi Kofaktor

Jika A adalah sebuah matriks persegi (ordo lebih dari 2×2) maka determinan matriks A dapat ditentukan sebagai berikut.

- $\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}k_{ij} = a_{1j}k_{1j} + a_{2j}k_{2j} + \cdots + a_{nj}k_{nj}$
  (ekspansi kofaktor minor kolom ke-j)
- $\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_{ij} = a_{i1}k_{i1} + a_{i2}k_{i2} + \cdots + a_{in}k_{in}$
  (ekspansi kofaktor minor baris ke-i)

Contoh 3.10

Determinan Matriks

Tentukan determinan matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian I

Determinan matriks P dengan Metode Sarrus.

$$= (1\times 6\times 4) + (3\times 2\times 5) + (2\times 2\times 9) - (5\times 6\times 2) - (9\times 2\times 1) - (4\times 2\times 3)$$
$$= 24 + 30 + 36 - 60 - 18 - 24$$
$$= -12$$

Alternatif Penyelesaian II

Kita akan menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama untuk menentukan determinan matriks P.

$$|P| = 1\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1(6\times 4 - 9\times 2) - 3(2\times 4 - 5\times 2) + 2(2\times 9 - 5\times 6)$$
$$= 1(24 - 18) - 3(8 - 10) + 2(18 - 30)$$
$$= 1(6) - 3(-2) + 2(-12)$$
$$= 6 + 6 - 24$$
$$= -12$$

Tentukan determinan matriks $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ menggunakan metode:

a. Metode Sarrus

b. Metode Ekspansi Kofaktor kolom ketiga

Determinan matriks berordo 3◇3 ini dapat kita gunakan untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV). Perhatikan SPLTV berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Nilai x, y, dan z dapat ditentukan sebagai berikut.

$$x = \frac{D_x}{D}\ ,\ y = \frac{D_y}{D}\ , \text{dan } z = \frac{D_z}{D}\ , \text{dengan } D \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \text{ dan } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) adalah himpunan yang memuat triple berurutan (x,y,z).

Sifat Determinan Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi, kalian diajak untuk menemukan sifat determinan matriks.

Diketahui matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Hitunglah nilai $|A|$, $|B|$, dan tentukan matriks AB.

b. Tentukan $|A||B|$dan $|AB|$. Dugaan apa yang kalian peroleh?

Berdasarkan kegiatan eksplorasi yang telah kalian lakukan, sifat determinan dapat ditulis sebagai berikut.

Sifat 3.4

Sifat Determinan Matriks

Jika $|A|$ dan $|B|$, maka $|AB| = |A||B|$.

Selidiki apakah pernyataan berikut berlaku untuk semua matriks.

- Jika $|A|$, $|B|$, dan $|C|$, maka $|ABC| = |A||B||C|$.
- Jika A merupakan matriks berordo $n \times n$ dan k merupakan skalar, maka $|kA| = k^n |A|$.

2. Invers Matriks

Di dalam himpunan bilangan real, setiap bilangan a (bukan nol) memiliki kebalikan yaitu bilangan a^{-1} dengan sifat $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Bilangan a^{-1} disebut invers (kebalikan) perkalian dari a. Berdasarkan pengetahuan tersebut invers matriks dapat didefinisikan.

Definisi 3.11

Invers Matriks

Jika A adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ dan I adalah matriks identitas berordo $n \times n$, maka terdapat matriks A^{-1} yang memenuhi sifat

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

A disebut matriks *nonsingular* dan A^{-1} disebut invers dari matriks A. Jika matriks A^{-1} tidak dapat ditemukan maka A disebut dengan matriks *singular*.

Catatan:

- Matriks A disebut matriks *nonsingular* jika $\det A \neq 0$
- Matriks A disebut matriks *singular* jika $\det A = 0$

Rumus 3.1

Invers Matriks Berordo 2×2

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ memiliki invers jika dan hanya jika $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Invers matriks A dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adjoin(A)$$

dengan $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ dan $Adjoin(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Contoh 3.11

Invers matriks berordo 2×2

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

$|A| = 3(2) - (-1)(-7) = 6 - 7 = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adjoin(A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Diketahui $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks $X^{-1}+Y^{-1}$.

Apakah matriks $X^{-1}+Y^{-1}$ sama dengan matriks $(X+Y)^{-1}$?

Rumus 3.2

Invers Matriks Berordo 3×3

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ memiliki invers jika dan hanya jika $|A| \neq 0$.

Maka invers matriks A dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adjoin(A)$$

Determinan matriks A dapat ditentukan dengan Metode Sarrus atau metode ekspansi kofaktor minor dan *Adjoin(A)* dapat ditentukan dengan transpos dari matriks kofaktor.

Sifat Invers Matriks

Melalui kegiatan eksplorasi ini kalian diajak untuk menemukan sifat invers matriks melalui pendekatan penyelesaian SPLDV.

Perhatikan sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Lakukan langkah-langkah berikut.

i). Sajikan SPLDV di atas dalam bentuk matriks;

ii). kalikan kedua ruas dengan $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}$;

iii). hitunglah hasil dari langkah ke ii.

Misalkan $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dugaan apa yang kalian peroleh dari kegiatan eksplorasi tersebut? Jelaskan.

Berdasarkan kegiatan eksplorasi yang telah kalian lakukan, sifat invers matriks dapat ditulis sebagai berikut.

Sifat 3.5

Sifat Invers Matriks

Jika A adalah matriks yang mempunyai invers, maka sistem persamaan linear $AX=B$ dapat ditentukan penyelesaiannya dengan $X=A^{-1}B$.

Determinan dan Invers Matriks

Kerjakan latihan berikut dengan jelas dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Jika A dan B merupakan matriks persegi yang berordo sama maka $|A|+|B|=|A+B|$.
2. *Benar atau salah.* Matriks $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks singular.
3. *Benar atau salah.* Jika A adalah matriks yang mempunyai invers, maka $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

Penerapan Konsep

4. Jika $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, dan matriks C memenuhi $AC = B$, maka tentukan nilai determinan C.
5. Tentukan $(AB^{-1})^{-1}$ jika diketahui $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
6. **Biologi.** Ahli biologi menempatkan tiga jenis bakteri ke dalam tabung reaksi yang diberi tanda Strain I, Strain II, dan Strain III. Ada tiga jenis makanan berbeda yang setiap hari disediakan yaitu 980 satuan makanan A, 740 satuan makanan B, dan 680 satuan makanan C. Setiap bakteri mengonsumsi sejumlah satuan makanan setiap harinya yang disajikan pada matriks berikut.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{II} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{matrix} \end{array}$$

Tentukan banyak bakteri dari Strain I, Strain II, dan Strain III dengan cara:

a). Determinan matriks

b). Invers matriks

1. Matriks adalah susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegipanjang yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom. Kelompok bilangan tersebut di dalam kurung biasa "( )", kurung siku "[ ]", atau "‖ ‖".
2. Matriks A dengan m baris dan n kolom disebut matriks berorodo (berukuran) $m \times n$. Bilangan dalam matriks disebut elemen matriks.
3. Transpos matriks adalah matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen pada baris menjadi elemen-elemen pada kolom dan sebaliknya. Transpos matriks A ditulis A^T atau A^t. Jika ordo matriks A adalah $m \times n$ maka ordo A^t adalah $n \times m$.
4. Dua matriks dikatakan sama jika dan hanya jika kedua matriks tersebut mempunyai ordo yang sama dan semua elemen seletak bernilai sama.
5. Penjumlahan atau pengurangan matriks A dan B dapat dilakukan jika matriks A dan B memiliki ordo yang sama. Operasi penjumlahan atau pengurangan matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen matriks A dan B yang seletak.
6. Jika matriks A matriks yang berordo $m \times n$ dan k adalah bilangan real (k sering disebut skalar), maka kA menyatakan matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen pada matriks A dengan k.
7. Dua buah matriks dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks yang dikali sama dengan banyak baris matriks pengalinya.
8. Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A dapat dinyatakan

   $$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$
9. Misalnya $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka determinan matriks A:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

10. Jika A adalah sebuah matriks persegi (ordo lebih dari 2×2) maka determinan matriks A:

   - $\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}k_{ij} = a_{1j}k_{1j} + a_{2j}k_{2j} + \cdots + a_{nj}k_{nj}$
     (ekspansi kofaktor minor kolom ke-j)

   - $\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_{ij} = a_{i1}k_{i1} + a_{i2}k_{i2} + \cdots + a_{in}k_{in}$
     (ekspansi kofaktor minor baris ke-i)

11. Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dapatdiinversjikadanhanyajika $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ maka invers matriks A dapat ditentukan oleh $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adjoin(A)$, dengan $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ dan $Adjoin(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

12. Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ dapat di invers jika dan hanya jika $|A| \neq 0$ maka invers matriks A dapat ditentukan oleh $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adjoin(A)$, dengan determinan dapat ditentukan dengan Metode Sarrus atau metode ekspansi kofaktor minor dan *Adjoin*(A) dapat ditentukan dengan transpos dari matriks kofaktor.

Uji Pemahaman

1. *Benar atau Salah.* Jika diketahui matriks A, B, dan C dengan $AB=C$ dan C memiliki 3 baris, maka matriks B juga memiliki 3 baris.
2. *Benar atau Salah.* Jika I dan A adalah matriks yang dapat dikalikan dan I adalah matriks identitas , maka $I^2A = A^2$.
3. *Benar atau Salah.* Jika matriks A dan B adalah matriks persegi yang berordo sama, maka $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
4. *Benar atau Salah.* Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang mempunyai invers dan berordo sama yaitu $n \times n$, maka matriks $B^{-1}(A^{-1}B^{-1})^{-1}A^{-1} = I$ dengan I adalah matriks identitas berordo $n \times n$.

Penerapan

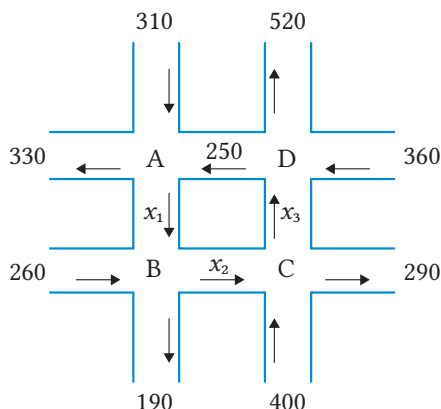
5. Tentukan nilai x, y, dan z, jika diketahui matriks

   $A = \begin{bmatrix} 9 & x+y+z & 2x-y+2z \\ 12 & 7 & 3x+2y-z \\ 12 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks simetris.

6. Diketahui matriks-matriks berikut.

   $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 1 \\ 3 & c+2 & -3 \\ -2 & 4 & -b \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

   Jika $B - A = C^t$ dan C^t merupakan tranpos matriks C maka tentukan nilai $c\sqrt{b+a}$.

7. **Arus lalu lintas.** Perhatikan gambar berikut ini

Gambar 3.4 Arus Lalu Lintas

Gambar 3.4 adalah gambar jalan raya pada suatu daerah. Angka-angka yang terdapat pada gambar menyatakan jumlah kendaraan yang melintas. Prinsip yang digunakan yaitu banyak kendaraan yang masuk menuju titik persimpangan A, B, C, dan D harus sama dengan jumlah kendaraan yang keluar. Buatlah matriks dari permasalahan tersebut kemudian tentukan banyak kendaraan pada x_1, x_2, dan x_3.

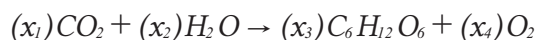
8. **Konstruksi.** Sebuah pabrik yang sedang dibangun berencana untuk memasang atap baja ringan pada tiga bangunan di pabrik tersebut. Pemilik pabrik mengundang dua kontraktor agar menyerahkan tawaran terpisah untuk pemasangan atap baja ringan pada setiap bangunan. Berikut ini adalah tabel tawaran-tawaran yang diterima pabrik (dalam juta rupiah).

Tabel 3.10. Penawaran Pemasangan Atap Baja Ringan

	Bangunan 1	Bangunan 2	Bangunan 3
Kontraktor A	16	15	19
Kontraktor B	14	13	24

dengan konsep matriks tentukan jumlah tawaran setiap kontraktor. Kontraktor mana yang akan dipilih untuk pemasangan baja ringan agar pengeluaran minimum?

9. **Reaksi fotosintesis.** Perhatikan persamaan reaksi fotosintesis berikut.

$(x_1)CO_2 + (x_2)H_2O \rightarrow (x_3)C_6H_{12}O_6 + (x_4)O_2$

Jika disajikan ke dalam bentuk matriks setiap molekul dengan baris matriks berturut-turut menunjukkan unsur C, H, dan O.

$$CO_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ H_2O = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C_6H_{12}O_6 = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{dan } \ O_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jika x_1=6 maka tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 agar persamaan kimia setimbang. Dengan menggunakan konsep matriks, tentukan persamaan reaksi kesetimbangannya.

10. **Industri.** Sebuah pabrik pembuatan furniture akan membuat ranjang dan rak Tv dengan tiga pilihan jenis furniture. Banyak furniture yang akan dibuat ditampilkan dalam matriks P di bawah ini dengan kolom matriks berturut-turut menunjukkan ranjang dan rak Tv sedangkan baris matriks berturut-turut menunjukkan jenis furniture *free standing furniture, built in furniture,* dan *knockdown furniture.*

$$P = \begin{bmatrix} 20 & 19 \\ 8 & 12 \\ 15 & 17 \end{bmatrix}$$

Setiap barang membutuhkan material furniture yang berbeda. Luas bahan material (dalam m^2) tiap furniture ditunjukkan pada matriks Q dengan kolom matriks berturut-turut menunjukkan material MDF (papan serat kepadatan menengah) dan *plywood* (kayu lapis) sedangkan baris matriks berturut-turut menunjukkan ranjang dan rak Tv

$$Q = \begin{bmatrix} 30 & 29 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks PQ dan interpretasikan setiap elemennya.

11. **Ekonomi.** Hitunglah keluaran total setiap sektor jika ditargetkan permintaan akhir sektor P adalah 200 dan sektor Q adalah 300, dengan matriks teknologi sebagai berikut.

$$\begin{matrix} & \text{P} & \text{Q} & \\ A = & \left[\begin{matrix} 0{,}10 \\ 0{,}02 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 0{,}14 \\ 0{,}20 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{sektor P} \\ \text{sektor Q} \end{matrix} \end{matrix}$$

Catatan: rumus permintaan akhir

$U = (I - A)X$

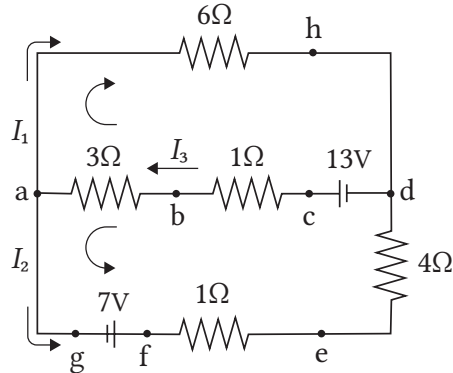
dengan

U = matriks permintaan akhir berodo $m \diamond 1$

I = matriks identitas berodo $m \times m$

A = matriks teknologi berodo $m \times m$

X = matriks keluaran total berodo $m \times 1$

12. **Arus listrik.** Perhatikan rangkaian arus listrik berikut.

Gambar 3.5 Arus Listrik

dari gambar 3.5, berdasarkan hukum *Kirchhoff* I dan hukum *Kirchhoff* II diperoleh.

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ -6I_1 - 4I_3 = -13 \\ -5I_2 - 4I_3 = -20 \end{cases}$$

Tentukan kuat arus I_1, I_2, dan I_3 (satuan ampere).

Penalaran

13. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ maka tentukan matriks $A^{2017} + A^{2020} + A^{2023}$.

14. Perhatikan SPLDV berikut ini.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$$

Himpunan penyelesaian SPLDV di atas memiliki anggota yang tak hingga banyaknya. Kaitkanlah banyaknya penyelesaian suatu SPLDV dengan determinan matriks. Tulislah simpulan yang kalian dapatkan.

15. Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 4c \end{bmatrix}$. Jika bilangan positif 2, a, dan 4c membentuk barisan geometri berjumlah 14 dan bilangan 2, b, dan 4c membentuk barisan aritmatika, maka tentukan $\det\left(\left(\left(\left(P^t\right)^{-1}\right)^t\right)^{-1}\right)^t$.

Pesan Rahasia

Pernahkah terpikir oleh kalian ketika kita mengirim pesan *WhatsApp* kepada seseorang mengapa orang lain tidak dapat menerima pesan tersebut? Apakah *WhatsApp* dapat membaca pesan yang kita kirim? Jawabannya adalah orang lain tidak dapat menerima pesan tersebut bahkan *WhatsApp* tidak dapat membaca pesan yang kita kirim karena kepada seseorang karena *WhatsApp* membangun aplikasinya menggunakan metode enkripsi *end-to-end*. Enkripsi adalah proses mengamankan suatu informasi dengan membuat informasi tersebut tidak dapat dibaca tanpa bantuan khusus. Dengan metode enkripsi *end-to-end*, pesan *WhatsApp* hanya dapat dibaca oleh *end user* atau pengguna aplikasi. *End user* 1 adalah pengirim pesan, ketika pesan dikirim secara otomatis hanya dapat di baca oleh *end user* 2 yaitu penerima pesan. Walaupun dikirim melalui *WhatsApp* tetapi *WhatsApp* tidak dapat membaca karena bentuk enkripsi. Jadi enkripsi *end-to-end WhatsApp* menjamin informasi atau pesan yang dikirim melalui aplikasi *WhatsApp* hanya dapat dibaca oleh pengirim dan penerima pesan sehingga penyadapan data atau pencurian data dapat dihindari.

Metode enkripsi *end-to-end* yang digunakan *WhatsApp* merupakan kriptografi tingkat lanjut. Pada proyek ini, kita akan mencoba menerapkan kriptografi sederhana yaitu menggunakan matriks untuk membuat pesan rahasia kepada teman kita. Langkah awal yang dilakukan adalah membentuk kelompok kemudian lakukan langkah-langkah berikut.

Membuat pesan rahasia

1. Buatlah sebuah pesan yang akan dikirim untuk kelompok lain
2. Buatlah aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai urutan alfabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	...	...	...	26

3. Ubahlah pesan kalian menjadi kode angka

Huruf	...	...	...	...	...	dst.
Angka	...	...	...	...	...	dst.

4. Susunlah bilangan ke dalam matriks A dengan ordo $3\times n$, dengan urutan peletakan bilangan adalah $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, ..., a_{3n}$. Apabila banyak bilangan bukan kelipatan 3, maka pada akhir kode di isi nol agar matriks sempurna.
5. Buatlah sembarang matriks K yang merupakan matriks kunci berordo 3×3. Matriks K ini diketahui pengirim pesan dan penerima pesan.
6. Tentukan matriks KA.
7. Lakukan operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks KA.
   Catatan: Modulo (mod) adalah sebuah operasi yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lain. Mod 27 dipilih agar setiap elemen matriks KA dapat dikembalikan menjadi huruf sesuai aturan langkah 3 yaitu dengan kode angka 0–26. Misalnya 28 mod 27 = 1, 27 mod 27 = 0, atau −14 mod 27 = 13
8. Ubah kembali setiap elemen hasil mod 27 yang kalian peroleh dari langkah 7 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah 3.
9. Tulislah pesan rahasia kemudian kirim pesan tersebut ke kelompok lain.

Membaca pesan rahasia

1. Gunakan aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai urutan alphabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	...	...	...	26

2. Ubahlah pesan yang telah diterima menjadi kode angka.
3. Susunlah matriks B dengan ordo $3\times n$, dengan urutan peletakan bilangan adalah $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, ..., a_{3n}$.
4. Penerima pesan mengetahui matriks K. Karena diketahui $B = KA$, maka bagaimana mencari matrik A? tentukan matriks A.
5. Lakukan operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks A.
6. Ubah kembali elemen hasil mod 27 yang kalian peroleh dari langkah 5 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah 1.
7. Temukan isi dari pesan rahasia.

Tuliskan simpulan dari proyek yang kalian buat.

Ingat-ingat kembali pengalaman belajar kalian di Bab 3 Matriks ini. Setelah itu, refleksikan pengalaman belajarmu tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut.

1. Sejauh mana manfaat yang dapat kalian rasakan setelah berdinamika di Bab 3 Matriks? Ceritakan manfaat yang dapat kalian rasakan.
2. Strategi-strategi belajar seperti apa yang kalian gunakan untuk belajar di Bab 3 Matriks? Apakah semua strateginya sudah membantu kalian untuk belajar secara optimal?
3. Sekarang, nilailah pembelajaran kalian sendiri di Bab 3 Matriks ini dengan mencentang kolom-kolom yang sesuai pada tabel berikut.

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
Subbab A Konsep Matriks				
1.	Saya dapat menyajikan data atau informasi ke dalam bentuk matriks;			
2.	Saya dapat menentukan pengertian dari matriks.			
3.	Saya dapat menentukan ordo dan elemen dari suatu matriks.			
Subbab B Jenis-Jenis Matriks				
4.	Saya dapat mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya			
5.	Saya dapat menentukan transpos dari suatu matriks			
Subbab C Kesamaan Dua Matriks				
6.	Saya dapat menjelaskan konsep kesamaan dua matriks.			
7.	Saya dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks.			
Subbab D Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks				
8.	Saya dapat menjelaskan konsep operasi penjumlahan matriks.			
9.	Saya dapat menentukan sifat-sifat operasi penjumlahan matriks.			

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
10.	Saya dapat menjelaskan konsep operasi pengurangan matriks.			
11.	Saya dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi penjumlahan dan pengurangan antarmatriks.			
Subbab E Perkalian Matriks				
12.	Saya dapat menjelaskan konsep perkalian matriks dengan skalar.			
13.	Saya dapat memahami sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar.			
14.	Saya dapat menjelaskan konsep perkalian dua matriks.			
15.	Saya dapat memahami sifat-sifat perkalian dua matriks.			
16.	Saya dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian matriks dengan skalar.			
17.	Saya dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian dua matriks.			
Subbab F Determinan dan Invers Matriks				
18.	Saya dapat menentukan determinan matriks persegi berordo 2×2.			
19.	Saya dapat menentukan determinan matriks persegi berordo 3×3 dengan metode Sarrus.			
20.	Saya dapat menentukan determinan matriks persegi berordo 3×3 dengan metode Ekspansi Kofaktor.			
21.	Saya dapat memahami sifat determinan matriks.			
22.	Saya dapat menentukan invers matriks			
23.	Saya dapat memahami sifat invers matriks.			
24.	Saya dapat menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) dengan determinan dan invers matriks.			
25.	Saya dapat menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) dengan determinan.			
26.	Saya dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks.			

Kalian telah mempelajari matriks pada buku ini. Untuk memperkaya atau memperdalam pengetahuan dan keterampilan yang kalian miliki kalian dapat mempelajari matriks pada:

- Buku Matematika Untuk SMA/MA kelas XI kelompok wajib semester 1, Sukino, Erlangga, 2017. Pada buku tersebut menjelaskan cara menentukan sistem persamaan linear menggunakan cara eliminasi Gauss-Jordan.
- https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Operasi-Matriks-2014/konten2.html laman ini menjelaskan tentang operasi pada matriks.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA, 2021
Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-770-2

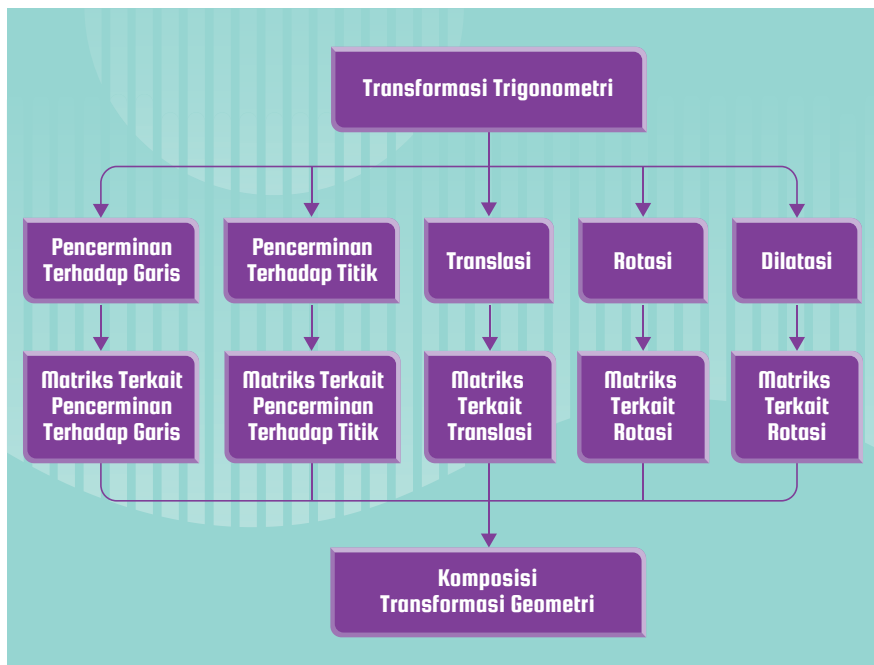
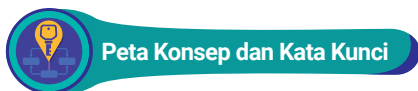
Bab 4

Transformasi Geometri

Pernahkah terpikir oleh kalian, bagaimana proses desain batik atau ornamen geometris di istana kerajaan ataupun di masjid bersejarah? Kira-kira, bagaimana cara ilmuwan, arsitek, maupun desainer mempelajari dan mengembangkan kekayaan budaya dari batik maupun ornamen geometris?

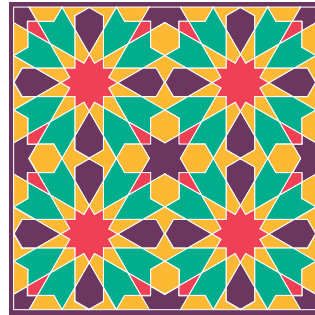
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut.

- Menjelaskan definisi dari beberapa transformasi.
- Melakukan berbagai macam transformasi geometri terhadap berbagai macam bentuk geometri.
- Mengidentifikasi dan menggunakan komposisi transformasi geometri.
- Mendeskripsikan transformasi menggunakan koordinat kartesius dan matriks.
- Mengoperasikan komposisi transformasi geometri dengan bantuan matriks yang merepresentasikan transformasi.
- Menerapkan transformasi geometri dalam permasalahan nyata.

Kata Kunci

Transformasi, Pencerminan, Translasi, Rotasi, Dilatasi, Komposisi Transformasi

Transformasi Geometri dan Budaya

Transformasi geometri merupakan bagian dari matematika yang memiliki kaitan dengan budaya, arsitektur, dan banyak hal lain. Salah satu di antaranya ialah penerapan konsep transformasi geometri dalam desain arsitektur istana kerajaan dan dinding masjid.

Gambar 4.1. Pola Geometris

Kekayaan arsitektur dan desain ini dapat dijumpai, misalnya, di situs istana-istana kerajaan Islam di Spanyol. Selain itu, di Indonesia, kita juga memiliki warisan budaya yang sampai sekarang masih kita pertahankan dan menggunakan konsep transformasi geometri. Salah satu contoh yang paling dikenal ialah motif batik. Motif-motif batik umumnya berulang dan merupakan hasil dari komposisi berbagai macam transformasi dari bentuk-bentuk sederhana. Selain motif dalam dua dimensi seperti batik, kita juga memiliki warisan budaya berupa candi-candi, baik candi Hindu maupun candi Buddha yang banyak ditemukan di Indonesia. Beberapa desain arsitektur yang terdapat di candi dapat dipandang menerapkan konsep transformasi dalam tiga dimensi.

Di dalam bab ini, kita akan belajar lebih dalam tentang konsep transformasi geometri dimulai dengan contoh sederhana sampai menggunakan matematika yang lebih canggih. Kita akan menggunakan geometri, aljabar, dan matriks untuk mempelajari konsep-konsep transformasi geometri.

A. Transformasi pada Bidang Kartesius

Pada subbab ini, kita akan belajar beberapa jenis transformasi meliputi pencerminan terhadap garis, pencerminan terhadap titik, rotasi, dan dilatasi.

1. Pencerminan terhadap Garis

Pencerminan dapat disebut juga sebagai refleksi. Secara sederhana, pencerminan merupakan transformasi yang mana sebuah objek dicerminkan terhadap garis yang dapat disebut garis refleksi. Garis refleksi juga sering

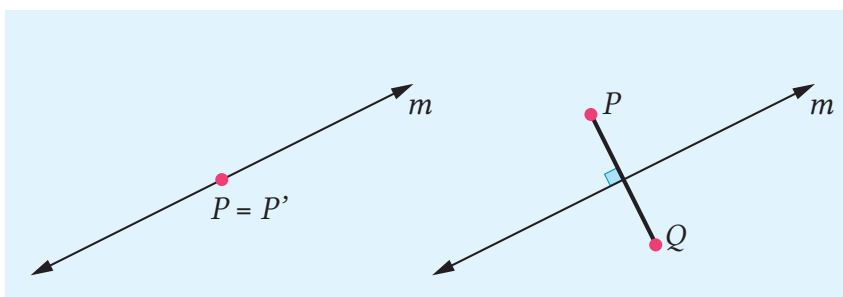
disebut sumbu refleksi, sumbu cermin, atau cermin. Salah satu dari sifat dari pencerminan ialah prapeta dan peta dari pencerminan memiliki orientasi yang berlawanan, tetapi tetap kongruen. Paling tidak, pada subbab ini, kita akan mempelajari pencerminan terhadap beberapa garis: sumbu X, sumbu Y, garis $y=x$, garis $y=-x$, garis $x=k$, dan garis $y=h$. Definisi dari pencerminan secara formal dapat disimak sebagai berikut.

Definisi 4.2

Pencerminan

Pencerminan σ untuk sebuah titik $P(x,y)$ pada bidang Kartesius terhadap garis m, yang dinotasikan sebagai σ_m, adalah sebuah relasi yang didefinisikan sebagai

$$\sigma_m(P(x,y)) = \begin{cases} P(x,y), \text{ jika } P(x,y) \text{ di } m \\ Q(x,y), \text{ jika } P(x,y) \text{ tidak di } m, \text{ dan } m \text{ merupakan garis sumbu dari segmen } \overline{PQ} \end{cases}$$

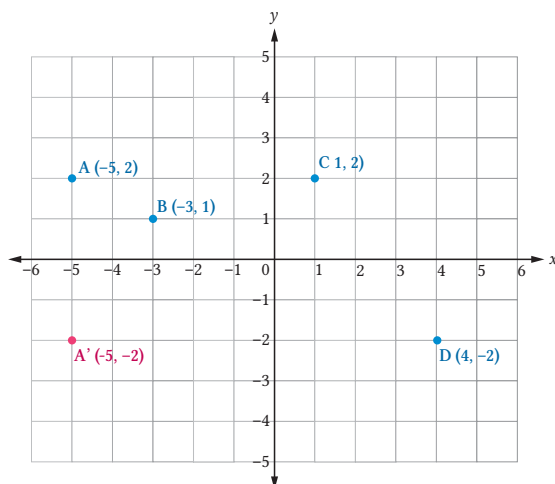
Ilustrasi dari definisi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.2. Gambar di sebelah kiri menjelaskan bahwa jika titik ada pada garis refleksi, maka petanya ialah dirinya sendiri. Gambar di sebelah kanan menjelaskan titik P yang dicerminkan terhadap garis m. Petanya adalah titik Q dan perhatikan bahwa m adalah garis sumbu dari segmen $\overline{PQ}$. Artinya, garis m tegak lurus dengan $\overline{PQ}$ dan membagi segmen $\overline{PQ}$ menjadi dua bagian sama panjang.

Gambar 4.2 Ilustrasi Pencerminan terhadap Garis

Selanjutnya, kalian akan belajar tentang pencerminan terhadap beberapa garis khusus yang telah disebut sebelumnya.

a. Pencerminan terhadap Sumbu X

Untuk menemukan formula aljabar dari pencerminan terhadap sumbu X, selesaikanlah aktivitas yang ada pada fitur eksplorasi berikut.

Mencari peta dari pencerminan terhadap sumbu X

Berdasarkan Definisi 4.1, selesaikan kegiatan berikut.

Gambar 4.3 Ilustrasi Pencerminan terhadap Sumbu X

1. Lihat Gambar 4.3 yang diberikan. Titik $A'(-5,-2)$ merupakan bayangan dari titik $A(-5,2)$ dari hasil pencerminan terhadap sumbu X. Untuk titik-titik lain, gambarkan petanya dan lengkapi tabel berikut.

Pra-peta	Peta
$A(-5,-2)$	$A'(-5,-2)$
$B(-3,1)$	...
$C(1,2)$	...
$D(4,-2)$	...

2. Dengan memperhatikan prapeta dan peta dari beberapa titik di Gambar 4.3, dapatkah kalian menemukan pola yang tampak? Tuliskan dugaan pola yang muncul. Jika belum, cobalah beberapa titik lain untuk dicari petanya.

3. Berdasarkan pengalaman di atas, apa yang dapat kalian simpulkan untuk sebarang titik di koordinat kartesius? Dengan kata lain, apa peta dari sebarang titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap sumbu X (garis $y=0$)?

Dari kegiatan eksplorasi yang telah dilakukan, kita dapat menemukan sifat berikut.

Sifat 4.1

Pencerminan terhadap Sumbu X

Peta dari titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap sumbu X adalah $P'(x,-y)$.

Contoh 4.1

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan $A(-1,4)$, $B(2,1)$, dan $C(-2,-1)$ yang dicerminkan terhadap sumbu X.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan peta dari segitiga ABC, kita akan menggunakan Sifat 4.1 untuk setiap titik sudutnya. Peta dari A $(-1,4)$ adalah A' $(-1,-4)$. Peta dari B $(2,1)$ adalah $B' = (2,-1)$. Peta dari C $(-2,-1)$ adalah $C' = (-2,1)$. Akibatnya, peta dari segitiga ABC adalah segitiga $A'B'C'$ dengan A' $(-1,-4)$, B' $(2,-1)$,dan C' $(-2,1)$.

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan $A(1,-2)$, $B(2,3)$, dan $C(-2,0)$ yang dicerminkan terhadap sumbu X.

Contoh 4.2

Peta untuk Sebuah Garis dari Pencerminan terhadap Sumbu X

Jika sebuah garis memiliki persamaan $2x-3y=0$ dicerminkan terhadap garis sumbu X, tentukan persamaan garis bayangannya.

Alternatif Penyelesaian

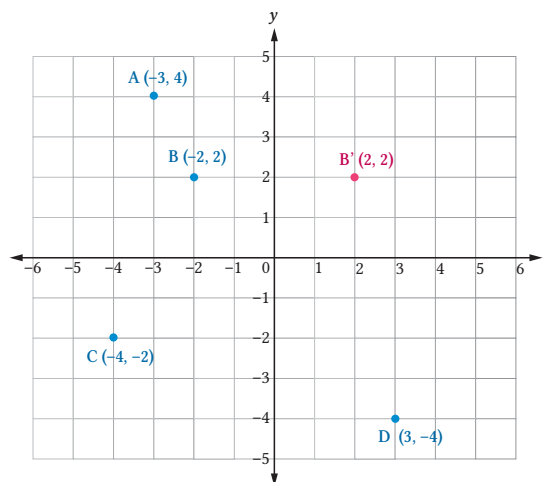
Karena tiap sebarang titik $P(a,b)$ pada garis $2x-3y=0$ dicerminkan oleh sumbu X menjadi $P'(a,-b)$, untuk mendapatkan persamaan garis bayangan, kita substitusi $x=a$ dan $y=-b$. Oleh karena itu, kita peroleh $2(a)-3(-b)=0 \Longleftrightarrow 2a+3b=0$. Karena a dan b merupakan variabel semu, kita juga dapat menuliskan persamaan garis bayangannya menjadi $2x+3y=0$.

Jika sebuah garis yang memiliki persamaan $2x+3y-4=0$ dicerminkan terhadap garis sumbu X, tentukan persamaan garis bayangannya.

b. Pencerminan terhadap Sumbu Y

Untuk menemukan formula aljabar dari pencerminan terhadap sumbu Y, selesaikanlah aktivitas yang ada pada fitur eksplorasi berikut.

Mencari Peta dari Pencerminan terhadap Sumbu Y

Berdasarkan Definisi 4.1, selesaikan kegiatan berikut.

Gambar 4.4 Ilustrasi Pencerminan terhadap Sumbu Y

1. Amati Gambar 4.4! Titik $B'(2,2)$ merupakan bayangan dari titik $B(-2,2)$ dari hasil pencerminan terhadap sumbu Y.

Pra-peta	Peta
$A(-3,4)$	...
$B(-2,2)$	$B'(2,2)$
$C(-4,-2)$	...
$D(3,-4)$	...

2. Dengan memperhatikan prapeta dan peta dari beberapa titik di Gambar 4.4, dapatkah kalian menemukan pola yang tampak? Tuliskan dugaan pola yang muncul. Jika belum, cobalah dengan beberapa titik lain untuk dicari petanya.
3. Berdasarkan pengalaman di atas, apa yang dapat kalian simpulkan untuk sebarang titik di koordinat Kartesius? Dengan kata lain, apa peta dari sebarang titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y (garis $x=0$)?

Dari kegiatan eksplorasi yang telah dilakukan, kalian dapat menemukan sifat berikut.

Sifat 4.2

Pencerminan terhadap Sumbu Y

Peta dari titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y adalah $P'(-x,y)$.

Contoh 4.3

Peta untuk Sebuah Titik dari Pencerminan terhadap Sumbu Y

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan $A(-2,4)$, $B(3,1)$, dan $C(-3,-1)$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan peta dari segitiga ABC, kita akan menggunakan Sifat 4.2 untuk setiap titik sudutnya. Peta dari $A(-2,4)$ adalah $A'(2,4)$. Peta dari $B(3,1)$ adalah $B'(-3,1)$. Peta dari $C(-3,-1)$ adalah $C'(3,-1)$. Akibatnya, peta dari ABC adalah $A'B'C'$ dengan $A'(2,4)$, $B'(-3,1)$, dan $C'(3,-1)$.

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan A (1,−2), B (2,3), dan C (−2,0) yang dicerminkan terhadap sumbu Y.

Contoh 4.4

Peta untuk Sebuah Garis dari Pencerminan terhadap Sumbu Y

Jika sebuah garis memiliki persamaan $3x-5y+7=0$ dicerminkan terhadap sumbu Y, tentukan persamaan dari garis bayangannya.

Alternatif Penyelesaian

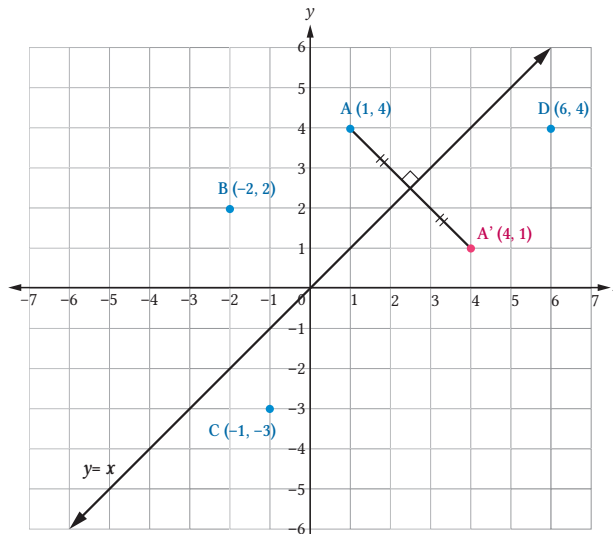
Karena tiap sebarang titik P (a,b) pada garis $3x-5y+7=0$ dicerminkan oleh garis sumbu Y menjadi P' $(-a,b)$, untuk mendapatkan persamaan garis bayangan, kita substitusi $x=-a$ dan $y=b$. Oleh karena itu, kita peroleh $3(-a)-5(b)+7=0 \iff -3a-5b+7=0$. Karena a dan b merupakan variabel semu, kita juga dapat menuliskan persamaan garis bayangannya menjadi $-3x-5y+7=0$.

Jika sebuah garis memiliki persamaan $2x-3y+7=0$ dicerminkan terhadap garis sumbu Y, tentukan persamaan garis bayangannya.

c. Pencerminan terhadap Garis y=x

Untuk menemukan formula aljabar dari pencerminan terhadap garis $y=x$, selesaikanlah aktivitas yang ada pada fitur eksplorasi berikut.

Mencari Peta dari Pencerminan terhadap Garis y = x

Berdasarkan Definisi 4.1, selesaikan kegiatan berikut.

Gambar 4.5 Ilustrasi Pencerminan terhadap Garis $y=x$

1. Amati Gambar 4.5, Titik A' (4,1) merupakan bayangan dari titik A (1,4) dari hasil pencerminan terhadap garis $y=x$.

Pra-peta	Peta
A (1,4)	A' (4,1)
B (−2,2)	...
C (−4,−2)	...
D (3,−4)	...

2. Dengan memperhatikan prapeta dan peta dari beberapa titik di Gambar 4.5, dapatkah kalian menemukan pola yang tampak? Tuliskan dugaan pola yang muncul. Jika belum, cobalah beberapa titik lain untuk dicari petanya.
3. Berdasarkan pengalaman di atas, apa yang dapat kalian simpulkan untuk sebarang titik di koordinat Kartesius? Dengan kata lain, apa peta dari sebarang titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$?

Dari kegiatan eksplorasi yang telah dilakukan, kalian dapat menemukan sifat berikut.

Sifat 4.3

Pencerminan terhadap Garis y=x

Peta dari titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$ adalah $P'(y,x)$.

Contoh 4.5

Peta untuk Sebuah Titik dari Pencerminan terhadap Garis y=x

Tentukan peta dari segitiga *ABC* dengan *A* (−2,4), *B* (3,1), dan *C* (−3,−1) yang dicerminkan terhadap garis $y = x$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan peta dari segitiga *ABC*, kita akan menggunakan Sifat 4.3 untuk setiap titik sudutnya. Peta dari *A* (−2,4) adalah *A′* (4,−2). Peta dari *B* (3,1) adalah *B′* (1,3). Peta dari *C* (−3,−1) adalah *C′* (−1,−3). Akibatnya, peta dari *ABC* adalah *A'B'C'* dengan *A'* (4,−2), *B'* (1,3), dan *C'* (−1,−3).

Tentukan peta dari segitiga *ABC* dengan *A* (1,−2), *B* (2,3) dan *C* (−2,0) yang dicerminkan terhadap garis $y = x$.

Contoh 4.6

Peta untuk Sebuah Garis dari Pencerminan terhadap Garis y=x

Jika sebuah garis memiliki persamaan $y=2x+3$ dicerminkan terhadap garis $y=x$, tentukan persamaan garis bayangannya.

Alternatif Penyelesaian

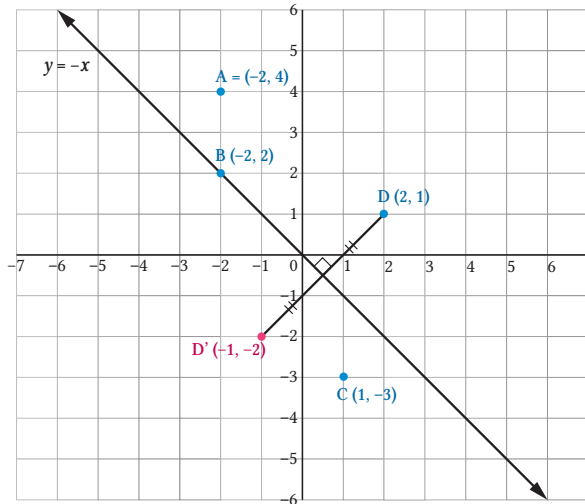
Karena tiap sebarang titik $P(x,y)$ pada garis $y = 2x + 3$ dicerminkan terhadap garis $y=x$, menjadi $P'(y,x)$, untuk mendapatkan persamaan garis bayangan, kita substitusi $x=y$ dan $y=x$. Oleh karena itu, kita peroleh $x = 2y + 3$.

Jika sebuah garis memiliki persamaan $y=-3x+5$ dicerminkan terhadap garis $y=x$, tentukan persamaan garis bayangannya.

d. Pencerminan terhadap Garis y=-x

Untuk menemukan formula aljabar dari pencerminan terhadap garis $y=-x$ $y=x$, selesaikanlah aktivitas yang ada pada fitur eksplorasi berikut.

Mencari Peta dari Pencerminan terhadap Garis y=-x

Berdasarkan Definisi 4.1, selesaikan kegiatan berikut.

Gambar 4.6 Ilustrasi Pencerminan terhadap Garis *y*=-*x*

1. Amati Gambar 4.6! Titik D' $(-1,-2)$ merupakan bayangan dari titik D $(2,1)$ dari hasil pencerminan terhadap garis $y=-x$.

Pra-peta	Peta
A $(-2,4)$	...
B $(-2,2)$	...
C $(1,-3)$	...
D $(2,1)$	D' $(-1,-2)$

2. Dengan memperhatikan prapeta dan peta dari beberapa titik di Gambar 4.6, dapatkah kalian menemukan pola yang tampak? Tuliskan dugaan pola yang muncul. Jika belum, cobalah beberapa titik lain untuk dicari petanya.

3. Berdasarkan pengalaman di atas, apa yang dapat kalian simpulkan untuk sebarang titik di koordinat Kartesius? Dengan kata lain, apa peta dari sebarang titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap garis $y=-x$?

Dari kegiatan eksplorasi yang telah dilakukan, kalian dapat menemukan sifat berikut.

Sifat 4.4

Pencerminan terhadap Garis y=-x

Peta dari titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap garis $y=-x$ adalah $P'(-y,-x)$

Contoh 4.7

Peta untuk Sebuah Titik dari Pencerminan terhadap Garis $y=-x$

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan $A(-2,4)$, $B(3,1)$, dan $C(-3,-1)$ yang dicerminkan terhadap garis $y=-x$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan peta dari segitiga ABC, kita akan menggunakan Sifat 4.4 untuk setiap titik sudutnya. Peta dari $A(-2,4)$ adalah $A'(-4,2)$. Peta dari $B(3,1)$ adalah $B'(-1,-3)$. Peta dari $C(-3,-1)$ adalah $C'(1,3)$. Akibatnya, peta dari segitiga ABC adalah segitiga $A'B'C'$ dengan $A'(-4,2)$, $B'(-1,-3)$, dan $C'(1,3)$.

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan $A(1,-2)$, $B(2,-3)$, dan $C(-2,0)$ yang dicerminkan terhadap garis $y=-x$.

Contoh 4.8

Peta untuk Sebuah Garis dari Pencerminan terhadap Garis $y=-x$

Jika sebuah garis memiliki persamaan $y=-4x-2$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$, tentukan persamaan garis bayangannya.

Alternatif Penyelesaian

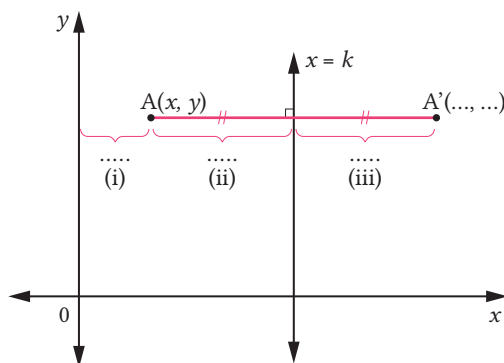
Karena tiap sebarang titik $P(x,y)$ pada garis $y=-4x-2$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$, menjadi $P'(-y,-x)$, untuk mendapatkan persamaan garis bayangan, kita substitusi $x=-y$ dan $y=-x$. Oleh karena itu, kita peroleh $-x=-4(-y)-2 \Leftrightarrow -x=4y-2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

Jika sebuah garis memiliki persamaan $4x+3y-2=0$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$, tentukan persamaan garis bayangannya.

e. Pencerminan terhadap Garis x=k

Untuk memahami bagaimana mengoperasikan pencerminan terhadap garis di bidang Kartesius, ikuti kegiatan eksplorasi berikut.

Mencari Peta dari Pencerminan terhadap Garis x=k

Berdasarkan Definisi 4.1, kita tahu bahwa jarak dari titik prapeta ke garis pencerminan sama dengan jarak dari titik peta ke garis pencerminan. Dengan menggunakan informasi ini, selesaikan kegiatan berikut.

Gambar 4.7 Ilustrasi Pencerminan terhadap Garis $x=k$

Misalkan, garis vertikal yang kita inginkan memiliki persamaan $x=k$ seperti yang diilustrasikan pada Gambar 4.7. dan titik yang ingin ditransformasikan adalah $A(x,y)$.

1. Perhatikan gambar. Tentukan nilai (i) yang merupakan jarak dari titik A ke sumbu Y.
2. Tentukan nilai (ii) yang merupakan jarak dari titik $A(x,y)$ ke garis $x=k$.
3. Tentukan nilai (iii) yang merupakan jarak dari titik A' (...,...) ke garis $x=k$.
4. Tentukan koordinat A' dalam x, y, dan k.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita dapat memperoleh sebuah sifat yang terkait dengan operasi pencerminan terhadap garis $x=k$.

Sifat 4.5

Pencerminan terhadap Garis x=k

Peta dari titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap garis $x=k$ adalah $P'(2k-x,y)$.

Contoh 4.9

Peta untuk Sebuah Titik dari Pencerminan terhadap Garis x=k

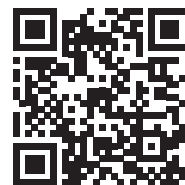
Tentukan peta dari titik $P(3,2)$ oleh pencerminan terhadap garis $x=3$.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 4.5, kita peroleh $P' = (2\times 3-3,2) = (3,2)$.

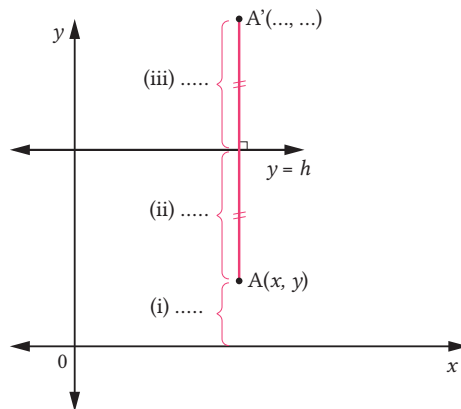
Tentukan peta dari titik $P(3,2)$ oleh pencerminan terhadap garis $x=5$.

Aktivitas Interaktif

Untuk menyelidiki bagaimana perilaku pencerminan terhadap garis $x=k$, lakukan aktivitas interaktif berikut ini dengan memindai kode batang atau membuka tautan berikut! https://s.id/DesmosPencerminan1

f. Pencerminan terhadap Garis y=h

Untuk memahami bagaimana mengoperasikan pencerminan terhadap garis di bidang Kartesius, ikuti kegiatan eksplorasi berikut.

Mencari Peta dari Pencerminan terhadap Garis y=h

Berdasarkan Definisi 4.1, kita tahu bahwa jarak dari titik prapeta ke garis pencerminan sama dengan jarak dari titik peta ke garis pencerminan. Dengan menggunakan informasi ini, selesaikan kegiatan berikut.

Gambar 4.8 Ilustrasi Pencerminan terhadap Garis *y=h*

Misalkan, garis horizontal yang kita inginkan memiliki persamaan $y=h$ seperti yang diilustrasikan pada Gambar 4.8. Misalkan juga, titik yang ingin ditransformasikan adalah $A\ (x,y)$.

1. Perhatikan Gambar 4.8. Tentukan nilai (i) yang merupakan jarak dari titik A ke sumbu X!
2. Tentukan nilai (ii) yang merupakan jarak dari titi $A\ (x,y)$ ke garis $y=h$!
3. Tentukan nilai (iii) yang merupakan jarak dari titi $A'\ (...,...)$ ke garis $y=h$!
4. Tentukan koordinat A' dalam x, y, dan h!

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita dapat memperoleh sebuah sifat yang terkait dengan operasi pencerminan terhadap garis $y=h$.

Sifat 4.6

Pencerminan terhadap Garis y = h

Peta dari titik $P(x,y)$ yang dicerminkan terhadap garis $y=h$ adalah $P'(x, 2h-y)$.

Contoh 4.10

Peta untuk Sebuah Titik dari Pencerminan terhadap Garis $y=h$

Tentukan peta dari titik $P(3,2)$ oleh pencerminan terhadap garis $y=3$.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 4.6, kita peroleh $P'(3,\ 2\times3-2)=(3,4)$.

Tentukan peta dari titik $P(5,-4)$ oleh pencerminan terhadap garis $y=-2$.

Berdasarkan Definisi 4.1 dan beberapa kegiatan yang telah dilakukan, dapatkah kalian menemukan formula untuk garis-garis lain dengan persamaan yang lebih kompleks? Misal, cari formula untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap garis $y=2x$. Pada soal uji kompetensi, kalian akan diminta untuk membuktikan formula secara umum untuk pencerminan terhadap garis $ax+by+c=0$.

2. Pencerminan terhadap Titik

Setelah belajar pencerminan terhadap garis, pada subbab kali ini, kita akan belajar tentang pencerminan terhadap titik. Ingat, bahwa pada pencerminan terhadap garis, garisnya membagi segmen menjadi dua sama panjang. Pada pencerminan terhadap titik, titik cerminnya adalah titik tengah dari peta dan prapeta. Untuk lebih jelasnya, silakan simak Definisi 4.2 berikut.

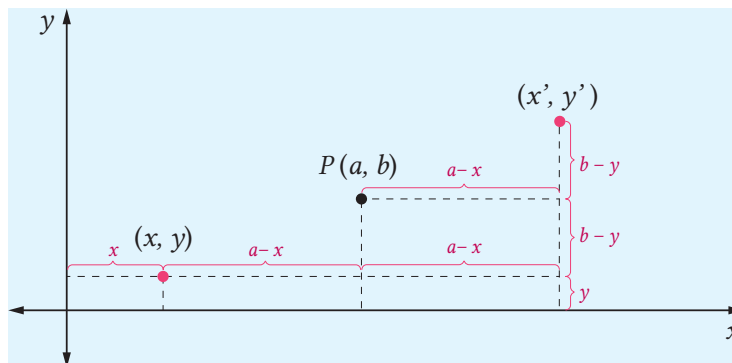
Definisi 4.2

Pencerminan terhadap titik

Pencerminan terhadap titik $P\ (a,b)$ yang dinotasikan sebagai σ_p, adalah sebuah relasi yang memetakan titik $Q\ (x,y)$ ke titik $Q'\ (x',y')$ dengan titik $P\ (a,b)$ sebagai titik tengah dari keduanya.

Sebagai informasi, ada yang menyebut pencerminan terhadap titik sebagai setengah putar. Hal ini karena jika kita menggambar titik peta, seolah kita memutar titik prapeta dengan pusat titik cermin sebesar 180°. Jika kita menganggap satu putaran penuh adalah 360°, maka 180° adalah setengah putar.

Selanjutnya, untuk menemukan rumus untuk mencari peta dari sebuah pencerminan terhadap titik, selesaikan kegiatan pada fitur eksplorasi berikut.

Mencari Formula untuk Peta dari Pencerminan terhadap Titik

Gambar 4.9 Ilustrasi Pencerminan terhadap Sebuah Titik

1. Perhatikan Gambar 4.9. Misalkan titik (x,y) dicerminkan terhadap titik $P(a,b)$ dan menghasilkan titik (x', y'). Dengan memperhatikan fakta bahwa titik $P(a,b)$ adalah titik tengah dari (x,y) dan (x',y'), tuliskan koordinat $P(a,b)$ dalam x, y, x', dan y'.
2. Sekarang, tuliskan koordinat (x',y') dalam x, y, a dan b.

Setelah menyelesaikan eksplorasi, kita dapat menuliskan hasilnya dalam Sifat 4.7.

Sifat 4.7

Pencerminan terhadap Titik P (a, b)

Peta dari titik (x, y) yang dicerminkan terhadap titik $P(a, b)$ adalah

$$(-x+2a,-y+2b).$$

Contoh 4.11

Peta untuk Sebuah Titik dari Pencerminan terhadap Titik

Tentukan titik peta dari setengah putar $\sigma_{(2,3)}$ untuk titik (5, 4).

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkna Sifat 4.7, kita peroleh $\sigma_{(2,3)}.\ (5,4)=(-5+2\times2,-4+2\times3)=(1,-2)$.

Tentukan titik peta dari setengah putar $\sigma_{(-2,3)}$ untuk titik (3,−4).

Contoh 4.12

Peta untuk Sebuah Garis dari Pencerminan terhadap Titik

Tentukan titik peta dari setengah putar $\sigma_{(1,3)}$ untuk garis l dengan persamaan $2x-y+3=0$.

Alternatif Penyelesaian

Ambil sebarang titik (x, y) pada garis l. Sebarang titik ini akan dipetakan oleh setengah putar $\sigma_{(1,3)}$ sebagai $\sigma_{(1,3)}(x, y)=(-x+2,-y+6)$. Dari hasil peta titik ini, kita bisa cari persamaan dari peta dari garis l dengan mensubstitusikan $-x+2$ ke x dan $-y+6$ ke y. Kita peroleh bahwa peta dari garis l memiliki persamaan $2(-x+2)-(-y+6)+3=0 \Leftrightarrow -2x+4+y-6+3=0 \Leftrightarrow -2x+y+1=0$.

Tentukan titik peta dari setengah putar $\sigma_{(1,-3)}$ untuk garis l dengan persamaan $2x+5y+6=0$.

3. Translasi

Translasi disebut pula pergeseran. Transformasi ini tidak mengubah orientasi dan kekongruenan bentuk geometri. Ia hanya menggeser suatu bentuk geometri dari suatu posisi ke posisi lain. Di dalam bidang Kartesius, kita dapat mendefinisikan translasi sebagai berikut.

Definisi 4.3

Translasi

Diberikan sebarang titik $P(x,y)$. Translasi berkaitan dengan vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ untuk titik $P(x,y)$, ditulis sebagai $\tau_{(a,b)}$ (x,y), didefinisikan sebagai $\tau_{(a,b)}$ $(x,y)=(x+a,y+b)$.

Contoh 4.13

Mentranslasikan sebuah Titik

Sebuah titik (3,2) ditranslasikan dengan vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tentukan titik peta dari translasi tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 4.3, kita peroleh $\tau_{(-2,3)}$ $(3,2)=(3-2,2+3)=(1,5)$.

Sebuah titik (–4,4) ditranslasikan dengan vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Tentukan titik peta dari translasi tersebut.

Contoh 4.14

Mentranslasikan sebuah Garis

Tentukan peta dari garis $l \equiv 2x + 3y - 1 = 0$ ditranslasikan dengan vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk setiap titik $P(x,y)$ pada garis l, petanya adalah P' $(x',y')=(x-1,y+1)$. Artinya, kita dapat menyatakan x dalam x' dan y dalam y' sebagai $x=x'+1$

dan $y=y'-1$. Akibatnya, peta dapat dicari dengan mensubtitusikan nilai tersebut ke persamaan garis l. Oleh karena itu, kita memperoleh $l' \equiv 2(x'+1)+3(y'-1)-1=0$ atau jika disederhanakan menjadi $l' \equiv 2x'+3y'-2=0$ atau bisa ditulis $l' \equiv 2x+3y-2=0$.

Tentukan peta dari garis $l' \equiv 5x-2y+3=0$ ditranslasikan dengan vektor (2,–1).

Mari Berpikir Kritis

Dapatkah kalian menentukan peta dari garis $ax+by+c=0$ yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$? Perhatikan Contoh 4.12 sebagai inspirasi.

4. Rotasi

Pada bagian ini, kalian akan mempelajari rotasi atau kadang disebut perputaran. Transformasi ini mempertahankan kongruensi dari sebuah objek, tetapi orientasi dapat berubah. Pada transformasi rotasi kita menggunakan sudut berarah, yang secara detail akan dibahas di Bab 5 Subbab A. Untuk rotasi, yang perlu diperhatikan adalah jika sudut bernilai positif maka rotasi dilakukan berlawanan dengan arah jarum jam. Jika sudut bernilai negatif, maka rotasi yang dilakukan searah dengan jarum jam. Secara formal, definisi dari rotasi dapat disimak berikut ini.

Definisi 4.4

Rotasi

Diketahui titik C dan sudut berarah $\theta°$. Rotasi dengan titik pusat C sebesar $\theta°$, yang dinotasikan dengan $\rho_{c,\theta}$, didefinisikan sebagai sebuah transformasi yang memetakan titik C ke dirinya sendiri dan memetakan sebarang titik lain P ke titik P' sedemikian sehingga dua kondisi terpenuhi, yakni.

- $CP=CP'$

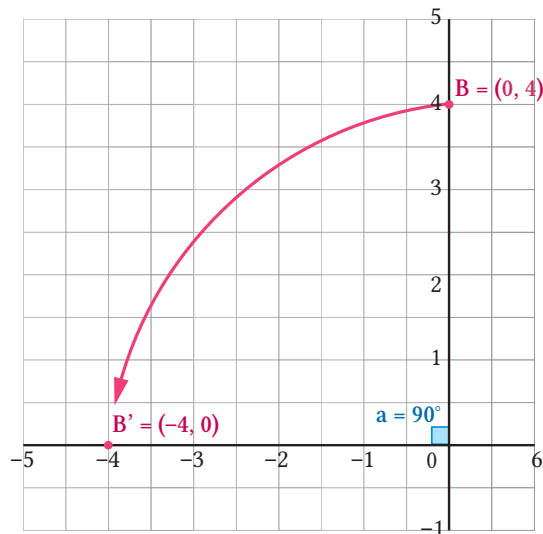
- θ merupakan ukutan sudut berarah dari sudut berarah yang terbentuk dari sinar $\overrightarrow{CP}$ dan $\overrightarrow{CP'}$.

Pada bagian ini, kita akan fokus untuk melihat kasus khusus rotasi terhadap titik asal (0,0) sebesar 90°. Secara umum, kita akan membahasnya lebih detail selanjutnya.

Contoh 4.15

Merotasikan sebuah Titik

Sebuah titik B(0,4) dirotasikan terhadap titik asal (0,0) sebesar 90°. Tentukan titik bayangannya.

Alternatif Penyelesaian

Gambar 4.10 Ilustrasi Rotasi 90° terhadap Titik Asal (0,0)

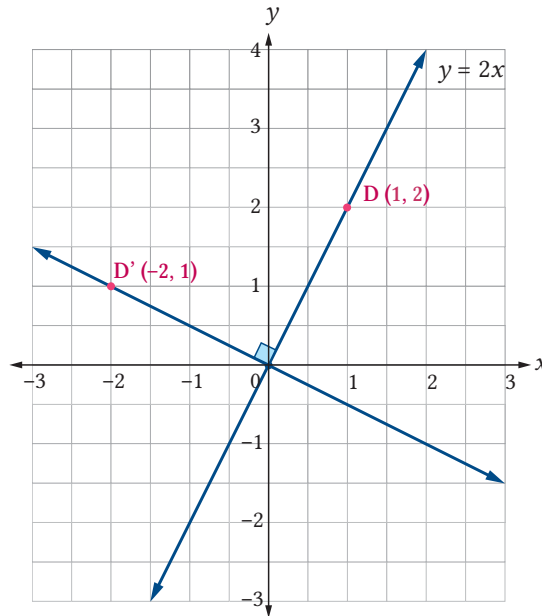
Dengan memperhatikan Gambar 4.10, titik B(0,4) berada di sumbu Y. Sudut 90° berarti arah putarannya berlawanan dengan arah jarum jam. Akibatnya, peta berada di sumbu X dan dapat kita tentukan petanya adalah titik B'(−4,0).

Sebuah titik A (3,0) dirotasikan terhadap titik asal (0,0) sebesar 90°. Tentukan titik bayangannya.

Contoh 4.16

Merotasikan sebuah Garis

Tentukan peta dari garis $y=2x$ yang dirotasikan terhadap titik asal (0,0) sebesar 90°.

Alternatif Penyelesaian

Gambar 4.11 Ilustrasi Rotasi 90° terhadap Titik Asal (0,0) terhadap Sebuah Garis

Perhatikan Gambar 4.11. Titik asal (0,0) dan titik D (1,2) ada di garis $y=2x$. Untuk menentukan peta dari garis ini, kita hanya perlu menentukan peta dari dua titik tersebut. Peta dari titik asal (0,0) yang dirotasikan 90° terhadap titik pusat adalah dirinya sendiri. Adapun peta dari D (1,2) oleh transformasi yang sama adalah D' (−2,1). Akibatnya, kita dapat menemukan persamaan garis peta yang melewati titik asal (0,0) dan D' (−2,1). Setelah melakukan kalkulasi, diperoleh $y=-\frac{1}{2}x$.

Tentukan peta dari garis $y=4x$ dirotasikan terhadap titik asal (0,0) sebesar 90°.

Mari Berpikir Kritis

Dapatkah kalian menentukan, secara umum, peta dari garis $y=kx$, $k \in R$, yang dirotasikan terhadap titik asal (0,0) sebesar 90°?

Secara umum, kita dapat menyatakan rotasi untuk sebarang titik (x,y) sebagai berikut. Misalkan, prapeta kita dinyatakan sebagai $x = r\cos(\alpha), y = r\sin(\alpha)$ dalam koordinat polar. Katakanlah sudut rotasinya adalah sebesar θ. Dengan informasi ini, peta dapat dinyatakan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
x' &= r\cos(\alpha + \theta) \\
&= r(\cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta)) \\
&= (r\cos(\alpha))\cos(\theta) - (r\sin(\alpha))\sin(\theta) \\
&= x\cos(\theta) - y\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= r\sin(\alpha + \theta) \\
&= r(\sin(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\theta)) \\
&= (r\sin(\alpha))\cos(\theta) + (r\cos(\alpha))\sin(\theta) \\
&= x\sin(\theta) + y\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Aktivitas Interaktif

Pembahasan lebih lanjut dapat disimak di YouTube *channel* "Geometri" yang dapat diakses di: s.id/Geometri

Sifat 4.8

Rotasi terhadap Titik Asal O (0,0) sebesar Tetha

Peta dari titik (x,y) yang dirotasikan terhadap titik $O(0,0)$ sebesar θ adalah $(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\cos(\theta) + y\sin(\theta))$.

5. Dilatasi

Secara sederhana, dilatasi dapat dimaknai sebagai pembesaran atau pengecilan. Definisi secara formal yang berlaku pada koordinat Kartesius, dapat disimak sebagai berikut.

Definisi 4.5

Dilatasi

Diketahui titik C sebagai pusat dilatasi dan sebuah faktor $k \neq 0$. Dilatasi terhadap titik A yang berpusat di titik C dengan faktor $k \neq 0$ adalah

sebuah transformasi $D_{(C,k)}$ sedemikian rupa sehingga petanya, $A'=D_{(C,k)}(A)$, memenuhi $\overrightarrow{CA'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$.

Contoh 4.17

Mendilatasikan sebuah Titik terhadap Titik Pusat

Jika titik $A(1,2)$ dilatasi terhadap titik asal $(0,0)$ dengan faktor 2, tentukan peta dari titik tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Peta dari transformasi $D_{(0,2)}$ tersebut dapat dicari dengan $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.
Jadi, petanya adalah (2,4).

Tentukan peta dari B (2,5) oleh dilatasi $D_{(0,3)}$.

Contoh 4.18

Mendilatasikan sebuah titik terhadap sebarang titik

Jika titik C (5,2) dilatasi terhadap titik P (2,3) dengan faktor 2, tentukan peta dari titik tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Peta dari transformasi $D_{(P,2)}$ tersebut dapat dicari dengan

$$\overrightarrow{PC'} = 2\overrightarrow{PC} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5-2 \\ 2-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=8 \\ y=1 \end{matrix}$$

Jadi, petanya adalah (8,1).

Tentukan peta dari $B(2,5)$ oleh dilatasi dengan pusat $P(1,3)$ dan faktor 3.

Batik dan Transformasi

Berdasasarkan pengerjaan soal sebelumnya, pelajari kembali budaya kita, Indonesia. Kalian eksplorasi bentuk-bentuk motif batik maupun arsitektur yang ada di sekitar kalian. Deskripsikan bentuk dasar dari motif tersebut dan apa saja transformasi yang dapat digunakan untuk membangun keseluruhan motif. Selanjutnya, kreasikan motif kalian sendiri dengan konsep transformasi yang telah dipelajari pada subbab ini.

Kerjakan latihan berikut dengan tepat dan benar!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Transformasi dilatasi dengan faktor bukan 1 atau -1 mempertahankan kekongruenan bentuk geometris seperti segitiga dan persegi.
2. *Benar atau salah.* Peta dari titik (x,y) oleh transformasi pencerminan terhadap titik asal (0,0) adalah (x,y).
3. *Benar atau salah.* Peta dari (x,y) oleh translasi oleh vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ adalah $(x+2,y-3)$.
4. *Benar atau salah.* Prapeta dari $(x+3,y-5)$ oleh translasi oleh vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah $(x+3,y-5)$.

Penerapan Konsep

5. Tentukan hasil peta dari bentuk geometri berikut.
   a). Titik (3,7) yang dicerminkan terhadap garis $y=x$.
   b). Parabola $2x^2-y+9=0$ yang dicermikan terhadap sumbu X.
   c). Segitiga ABC dengan $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(-2,-3)$yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

d). Garis $3x-2y+5=0$ yang ditransformasi oleh setengah putar terhadap titik asal (0,0).

e). Kurva $y=x^3-7x+2x-5$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y.

B. Kaitan Matriks dengan Transformasi

Setelah mempelajari beberapa transformasi geometri dalam bidang Kartesius pada subbab sebelumnya, kali ini, kita akan mempelajari tentang kaitan matriks dengan transformasi. Matriks 2×2 dapat dikaitkan dengan operasi transformasi terhadap sebarang titik pada bidang Kartesius. Sebuah titik pada bidang kartesius yang seringkali disimbolkan dengan pasangan terurut (x,y) dapat juga disimbolkan dengan vektor posisi $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Notasi yang kedua inilah yang akan banyak digunakan dalam bab ini.

Contoh 4.19

Mengalikan sebuah Matriks dengan Sebuah Vektor Posisi

Jika $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ merepresentasikan sebarang titik di bidang Kartesius, carilah hasil kali $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

Hasil kali matriks tersebut adalah $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$. Jika diperhatikan, titik (x,y) ditransformasikan oleh matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ menjadi titik $(-y,x)$.

Carilah hasil kali dari $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Contoh 4.20

Mengalikan Sebuah Matriks dengan Tiga Buah Titik Sekaligus

Carilah peta dari ΔABC, dengan titik sudut $A(1,1)$, $B(4,1)$, dan $C(4,2)$ yang ditransformasikan dengan matriks $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

Pertama-tama, kita dapat menuliskan koordinat titik-titik itu sebagai kolom-kolom matriks, yakni $\begin{matrix} A & B & C \\ \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Selanjutnya, kalikan dari kiri matriks itu dengan $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Kita peroleh $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Hasil transformasinya adalah sebuah segitiga baru $\Delta A'B'C'$ dengan titik-titik sudut $A'(-1,-1)$, $B'(-4,-1)$. dan $C'(-4,-2)$.

Suatu transformasi berkaitan dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Carilah peta dari suatu segitiga dengan titik sudut $A(2,0)$, $B(2,1)$, dan $C(0,1)$ oleh transformasi tersebut!

1. Matriks Berkaitan dengan Pencerminan

Pada subbab sebelumnya, kita telah menemukan beberapa formula aljabar untuk mencari peta dari pencerminan terhadap beberapa garis. Pada kegiatan eksplorasi berikut, kita akan belajar bagaimana menemukan matriks-matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis.

Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Pencerminan

Di subbab sebelumnya, kalian telah belajar tentang pencerminan terhadap sumbu X yang dilakukan di bidang Kartesius. Pada bagian ini, kalian akan

belajar tentang bagaimana menemukan matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu X. Pertama-tama, ingat kembali bahwa titik (x,y) dipetakan ke titik $(x,-y)$ oleh pencerminan terhadap sumbu X. Selanjutnya, ikuti dua instruksi berikut untuk menemukan matriks yang diinginkan.

1. Misalkan, matriks yang ingin kita cari adalah $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. Untuk mencari peta dari transformasi yang terkait dengan matriks ini, kita dapat mengalikannya dengan sebarang titik (x,y) dalam bentuk vektor posisi. Dengan kata lain, selesaikan perkalian matriks berikut:
   $$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
2. Kalian telah memisalkan matriks $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ sebagai representasi dari pencerminan terhadap sumbu X. Artinya, kita tahu bahwa hasil akhirnya adalah $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$. Selanjutnya, berdasarkan hasil yang diperoleh pada bagian 1, selesaikan persamaan berikut dengan mencari nilai dari *r, s, t, u*
   $$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang serupa, carilah matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu Y, garis $y=x$, dan garis $y=-x$.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita dapat menemukan tiga buah sifat yang akan dijelaskan pada Sifat 4.9.

Sifat 4.9

Matriks Pencerminan

Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap sumbu X adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap sumbu Y adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $y=x$ adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $y=-x$ adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk lebih memahami Sifat 4.9, perhatikan beberapa contoh berikut dan selesaikan beberapa aktivitas Mari, Mencoba.

Contoh 4.21

Mencari Peta dari Sebuah Pencerminan dengan Matriks

Carilah peta dari (3,–4) yang dicerminkan terhadap sumbu X.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 4.9, kita peroleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Carilah peta dari titik (3,5) yang dicerminkan terhadap sumbu X dengan menggunakan perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Contoh 4.22

Mencari Peta dari Sebuah Pencerminan dengan Matriks

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan $A(3,1)$, $B(-2,3)$, dan $C(2,-1)$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y!

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan matriks transformasi, kita bisa dapatkan

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga, petanya adalah segitiga $A'B'C'$ dengan $A'(-3,1)$, $B'(2,3)$, dan $C'(-2,-1)$.

Tentukan peta dari segitiga ABC dengan $A(3,1)$, $B(-2,3)$, dan $C(2,-1)$ yang dicerminkan terhadap garis $y=-x$!

Dapatkah kalian menemukan operasi matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $x=k$ dan $y=h$? Apakah kalian dapat menemukan matriks tersebut dengan cara yang sama pada kegiatan "Eksplorasi-Mencari matriks yang terkait dengan pencerminan?" Carilah operasi matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $x=k$ dan $y=h$ berdasarkan Sifat 4.5 dan Sifat 4.6.

Petunjuk:

Operasi matriks yang terkait dengan dua transformasi tersebut memiliki bentuk sebagai berikut. Kamu dapat mencoba mencari nilai dari r, s, t, u, v, dan w.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

2. Matriks Berkaitan dengan Pencerminan terhadap Titik

Pada bagian ini, kita akan mempelajari bagaimana cara menemukan matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap titik pusat dan sebarang titik. Pertama, pada kegiatan eksplorasi berikut, kita akan belajar tentang matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap titik pusat.

Mencari Matriks Pencerminan Terhadap Titik Pusat

Di subbab sebelumnya, kita telah belajar tentang pencerminan terhadap titik (setengah putar) yang dilakukan di bidang Kartesius. Pada bagian ini, kita akan belajar tentang bagaimana menemukan matriks yang berkaitan dengan

operasi pencerminan terhadap titik pusat. Selanjutnya, ikuti instruksi berikut untuk menemukan operasi matriks yang sesuai dengan transformasi ini.

Berdasarkan Sifat 4.7, kita mengetahui bahwa hasil peta dari pencerminan terhadap titik pusat adalah $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$. Untuk mencari matriks persegi berordo 2×2, kita misalkan $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. Selanjutnya, selesaikan persamaan matriks berikut

untuk mencari nilai r, s, t, dan u.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita mendapatkan sifat berikut.

Sifat 4.10

Matriks Pencerminan terhadap Titik Pusat

Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap titik pusat O adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.23

Mencari Peta dari Sebuah Pencerminan terhadap Titik dengan Matriks

Tentukan peta dari titik $A(-1,1)$ dan $B(3,-2)$ yang dicerminkan terhadap titik pusat!

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan matriks transformasi, kita bisa peroleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sehingga, kita dapatkan petanya adalah $A'(1,-1)$ dan $B'(-3,2)$.

Tentukan peta dari titik A (1,−7) dan B (−7,−2)yang dicerminkan terhadap titik pusat!

Selanjutnya, pada kegiatan eksplorasi berikut, kita akan belajar tentang bagaimana menemukan matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap sebarang titik.

Mencari Matriks Pencerminan terhadap Sebarang Titik

Pada bagian ini, kita akan belajar tentang bagaimana menemukan matriks yang berkaitan dengan operasi pencerminan terhadap titik secara umum. Ingat kembali bahwa pada subbab sebelumnya, peta dari (x,y) yang dicerminkan terhdap titik (a,b) adalah $(-x+2a,-y+2b)$. Selanjutnya, ikuti instruksi berikut untuk menemukan operasi matriks yang sesuai dengan transformasi ini.

Pertama, perhatikan bahwa tujuan kita adalah untuk menemukan operasi matriks sehingga kita bisa mendapatkan hasil akhir berupa vektor posisi dari titik $(-x+2a,-y+2b)$. Dengan berbekal informasi ini dan konsep operasi matriks, kita perhatikan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x+2a \\ -y+2b \end{bmatrix}$$

Carilah nilai dari r, s, t, u, v, dan w dengan menyelesaikan operasi di sebelah kiri persamaan matriks di atas dan selesaikan persamaan matriks tersebut.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita mendapatkan sifat berikut.

Sifat 4.11

Pencerminan terhadap Titik

Operasi matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap titik $P(a,b)$ untuk sebarang titik (x,y) adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.24

Mencari Peta dari Sebuah Pencerminan terhadap Titik dengan Matriks

Tentukan peta dari titik (2,3) oleh pencerminan terhadap titik (1,1).

Alternatif Penyelesaian

Dengan mengaplikasikan Sifat 4.11, kita peroleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$ Petanya adalah (−1,0).

Tentukan peta dari titik (3,1) oleh pencerminan terhadap titik (−2,−1).

3. Matriks Berkaitan dengan Translasi

Pada bagian ini, kita akan mempelajari bagaimana menemukan dan mengaplikasikan matriks yang terkait dengan translasi.

Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Translasi

Di subbab sebelumnya, kita telah belajar tentang translasi yang dilakukan di bidang Kartesius. Pada bagian ini, kita akan belajar tentang bagaimana menemukan operasi matriks yang berkaitan dengan operasi translasi.

1. Ubahlah bentuk vektor berikut menjadi operasi dari dua buah vektor sedemikian rupa sehingga vektor posisi titik (x,y) terpisah.

$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita mendapatkan sifat berikut.

Sifat 4.12

Operasi Matriks terkait Translasi

Operasi matriks yang terkait dengan translasi oleh vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ terhadap titik (x,y) adalah $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Contoh 4.25

Mencari Peta dari Sebuah Translasi dengan Bantuan Matriks

Tentukan peta dari titik $(-2,3)$ yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ menggunakan operasi matriks.

Alternatif Penyelesaian

Petanya dapat ditentukan dengan $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Petanya adalah (-5,7).

Tentukan peta dari titik $(4,-5)$ yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ menggunakan operasi matriks.

4. Matriks Berkaitan dengan Rotasi

Pada bagian ini, kita akan belajar untuk menemukan matriks yang terkait dengan rotasi terhadap titik pusat. Untuk itu, ikuti kegiatan eksplorasi berikut.

Mencari Matriks Rotasi terhadap Titik Asal (0,0) Sebesar θ

Di subbab sebelumnya, kalian telah belajar tentang rotasi yang dilakukan di bidang Kartesius. Pada bagian ini, kita akan belajar tentang bagaimana menemukan matriks yang berkaitan dengan operasi rotasi. Ikuti penjelasan dan intruksi berikut.

Misalkan, matriks yang kita cari adalah $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. Berdasarkan subbab sebelumnya, peta dari titik (x,y) yang dirotasikan terhadap titik asal (0,0) sebesar tetha adalah $(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$. Oleh karena itu, carilah *r, s, t, u* sedemikian rupa sehingga memenuhi

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita mendapatkan sifat berikut.

Sifat 4.13

Matriks Rotasi terhadap Titik Asal (0,0)

Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar θ radian terhadap titik pusat $O(0,0)$ adalah

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Secara lebih umum, kalian juga bisa mendapatkan sifat berikut.

Sifat 4.14

Operasi Matriks terkait Rotasi terhadap Titik Sebarang

Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar θ radian terhadap titik (a,b) adalah

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.26

Mencari Peta dari Sebuah Translasi dengan Bantuan Matriks

Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar $\theta = \frac{1}{4}\pi$ (π radian=180°) radian terhadap titik pusat adalah

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{4}\pi) & -\sin(\frac{1}{4}\pi) \\ \sin(\frac{1}{4}\pi) & \cos(\frac{1}{4}\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks-matriks yang berkaitan dengan rotasi terhadap titik pusat O (0,0) sebesar $\frac{1}{6}\pi$ radian.

Bilangan Kompleks dalam Transformasi

Kalian telah mempelajari tentang bilangan kompleks di Bab 1. Selain itu, pada Bab 3, telah dilihat bagaimana keterkaitan antara bilangan kompleks dan matriks, yakni bentuk matriks $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ bisa dinyatakan dalam bentuk $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a+ib$ dengan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i$.

Perhatikan bahwa hasil perkalian bilangan $z=a+ib$ dan i menghasilkan $iz=-b+ai$, yaitu hasil rotasi z sebesar 90° yang berlawanan dengan arah putaran jarum jam. Hal ini sesuai dengan matriks transformasi yang kalian pelajari pada bab ini, dengan i bertindak sebagai matriks rotasi sebesar 90°.

5. Matriks berkaitan dengan Dilatasi

Pada bagian ini, kita akan mencari matriks yang terkait dengan transformasi dilatasi. Kita akan menggunakan pengetahuan tentang dilatasi yang telah kita dapat pada subbab sebelumnya.

Mencari matriks yang Berkaitan dengan Dilatasi

Di subbab sebelumnya, kita telah belajar tentang dilatasi yang dilakukan di bidang Kartesius. Pada bagian ini, kita akan belajar tentang bagaimana menemukan matriks yang berkaitan dengan operasi dilatasi. Ingat kembali bahwa titik (x,y) dipetakan oleh dilatasi dengan faktor $k \neq 0$ dan pusat O ke (kx,ky). Ikuti instruksi berikut untuk menemukan matriks terkait.

- Misalkan, matriks yang ingin kita cari adalah $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. Carilah r, s, t, u sedemikian rupa sehingga memenuhi $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$.

Ingat kembali bahwa titik (x,y) dipetakan oleh dilatasi dengan faktor $k \neq 0$ dan pusat (a,b) ke $(k(x-a)+a,k(y-b)+b)$.

- Temukan kombinasi operasi matriks terhadap vektor posisi $\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$ sehingga hasilnya menjadi $\begin{bmatrix} k(x-a)+a \\ k(x-b)+b \end{bmatrix}$.

Berdasarkan eksplorasi tersebut, kita dapat menemukan sifat berikut.

Sifat 4.15

Matriks Dilatasi terhadap Titik Pusat

Matriks yang terkait dengan dilatasi dengan faktor $k \neq 0$ oleh titik pusat $O\,(0,0)$ adalah

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

Sifat 4.15

Operasi Matriks terkait Dilatasi terhadap Sebarang Titik

Matriks yang terkait dengan dilatasi dengan faktor $k \neq 0$ oleh titik (a,b) adalah

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Contoh 4.27

Mencari peta dari Sebuah Dilatasi dengan Bantuan Matriks

Tentukan peta dari titik (2,4) yang ditransformasikan oleh dilatasi dengan faktor 2 oleh titik pusat (1,1)!

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan Sifat 4.11, kita peroleh petanya

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Carilah koordinat peta dari titik (a,b) oleh dilatasi $[O,3]$!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Operasi matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sama halnya dengan operasi perkalian skalar $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
2. *Benar atau salah.* Transformasi pencerminan terhadap titik asal (0,0) ekuivalen dengan transformasi rotasi sebesar 180 terhadap titik asal (0,0).
3. *Benar atau salah.* Translasi dengan vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ terhadap titik (x,y) berkaitan dengan operasi matriks $\begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix}$.
4. *Benar atau salah.* Transformasi rotasi terhadap titik asal (0,0) sebesar180° terkait dengan matriks $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. Tuliskanlah matriks yang berkaitan dengan transformasi berikut.
   a). Identitas
   b). Setengah putar terhadap titik pusat $O\,(0,0)$
   c). Pencerminan terhadap sumbu X
   d). Pencerminan terhadap garis $y=x$
   e). Pencerminan terhadap garis $y=-x$
   f). Rotasi terhadap titik asal O sebesar $\frac{1}{2}\pi\ (90^\circ)$
   g). Rotasi terhadap titik asal O sebesar $-\frac{1}{2}\pi\ (-90^\circ)$

Penerapan Konsep

6. Tentukan hasil peta dari beberapa operasi transformasi yang terkait dengan matriks-matriks berikut.
   a). Titik (3,7) yang ditransformasikan dengan matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   b). Parabola $3x^2-2y+5=0$ oleh transformasi dengan matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   c). Segitiga ABC dengan $A(0,2)$, $B(5,-1)$, $C(-7,-2)$ oleh transformasi dengan matriks $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
   d). Garis $x-2y+3=0$ yang ditransformasikan oleh $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
   e). Kurva $y=2x^3-x^2+5x$ yang ditransformasikan oleh $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C. Komposisi Transformasi dengan Menggunakan Matriks

Di dalam subbab sebelumnya, kalian telah membahas transformasi dan transformasi dengan matriks. Pada subbab kali ini, kalian akan mempelajari tentang komposisi transformasi dengan menggunakan matriks. Pertama, kita akan membatasi pembahasan untuk transformasi-transformasi yang dapat direpresentasikan dengan matriks berordo 2×2. Misalnya, pencerminan terhadap sumbu X dapat direpresentasikan oleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Operasi matriks untuk menemukan peta dari titik (x,y) yang dicerminkan terhadap sumbu X

adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Transformasi-transformasi seperti ini yang telah dibahas pada subbab sebelumnya adalah sebagai berikut.

1). Pencerminan terhadap sumbu X
2). Pencerminan terhadap sumbu Y
3). Pencerminan terhadap garis $y=x$
4). Pencerminan terhadap garis $y=-x$
5). Pencerminan terhadap titik pusat
6). Rotasi terhadap titik asal (0,0)
7). Dilatasi terhadap titik asal (0,0)

Untuk memahami bagaimana menemukan operasi matriks yang terkait dengan komposisi transformasi, kerjakanlah kegiatan eksplorasi berikut.

Mengoperasikan Komposisi Transformasi dengan Menggunakan Matriks

Misalkan, kita memiliki dua buah transformasi T_1 dan T_2. T_1 merupakan pencerminan terhadap sumbu Y, sedangkan transformasi T_2 merupakan rotasi terhadap titik asal O sebesar $\frac{1}{2}\pi$ radian (90°).

1. Apabila kalian ingin melakukan transfosmasi komposisi untuk sebarang titik $P(x,y)$ yang dimulai dengan T_1 dan dilanjutkan dengan T_2, atau bisa dinotasikan dengan $T_2 \circ T_1$, tentukan hasil transformasinya dengan dua acara:

    a). Kalikan matriks yang terkait dengan T_1 dengan $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Kemudian, kalikan matriks yang terkait dengan T_2 dengan hasilnya.

    b). Kalikan matriks yang terkait dengan T_2 dengan matriks yang terkait dengan T_1. Kemudian, kalikan hasilnya dengan $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

2. Bandingkan hasil perkalian pertama dan kedua. Apakah keduanya sama? Apa kira-kira kesimpulan yang dapat kalian tarik?

3. Secara umum, mengapa menyelesaikan perkalian matriks berikut dengan mengerjakan yang dilingkari terlebih dahulu sama saja?

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Berdasarkan aktivitas eksplorasi tersebut, kita dapat memperoleh Sifat berikut.

Sifat 4.17

Matriks Transformasi Komposisi

Misal, matriks yang berkaitan dengan transformasi T_1 dan T_2 berturut-turut adalah $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}$. Maka, matriks yang terkait dengan komposisi transformasi $T_2 \circ T_1$ (Transformasi T_1 dilanjutkan dengan T_2) adalah $\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$.

Contoh 4.28

Mencari Peta dari Komposisi Transformasi dengan Bantuan Matriks

Tentukan peta dari titik (2,5) yang dicerminkan terhadap sumbu X dan kemudian dicerminkan terhadap sumbu Y.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 4.17, matriks terkait pencerminan terhadap sumbu X adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap sumbu Y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, matriks terkait dengan komposisi dari pencerminan terhadap sumbu X yang dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu Y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Akibatnya, peta yang kita inginkan dapat dicari dengan $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Tentukan peta dari titik (−2,3) yang ditransformasikan oleh komposisi dari refleksi sumbu Y yang dilanjutkan dengan rotasi 180° terhadap titik asal.

Contoh 4.29

Mencari Peta dari Komposisi Transformasi dengan Bantuan Matriks

Misalkan, kalian ingin melakukan tiga buah transformasi pada sebuah titik $P(2,5)$, yakni refleksi terhadap sumbu X, rotasi 90° terhadap titik asal, dan setengah putar. Tentukan petanya!

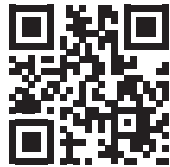
Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan subbab sebelumnya, kita tahu bahwa matriks yang berkaitan dengan refleksi terhadap sumbu X, rotasi 90° terhadap titik asal, dan setengah putar berturut-turut adalah $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$. Oleh karena itu, matriks yang terkait dengan komposisi transformasi tersebut adalah $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$. Dengan matriks ini, kita dapat memperoleh peta dari $P(2,5)$: $\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix}$

Misalkan, kita ingin melakukan tiga buah transformasi pada sebuah titik $P(2,5)$, yakni refleksi terhadap sumbu Y, rotasi 180° terhadap titik asal, dan pencerminan terhadap garis $y=x$. Tentukan petanya!

1. Pada sifat sebelumnya, kita belum tahu apakah operasi perkalian yang melibatkan dua matriks yang berkaitan dengan komposisi dari dua transformasi adalah komutatif atau tidak. Selidikilah, kapan sifat komutatif berlaku benar.
2. Misalkan, suatu matriks 2×2, katakanlah M, merepresentasikan suatu transformasi T pada sebuah bidang kartesius. Tentukan matriks yang berkaitan dengan transformasi T yang diterapkan sebanyak 99 kali dan dinotasikan $\underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{99\ kali}$.

Carilah literatur dalam bahasa Inggris yang terkait dengan transformasi geometri. Salah satu matematikawan yang menarik jika digali kisahnya adalah M. C. Escher. Ada sebuah kisah tentang dirinya yang terinspirasi oleh kekayaan motif pengubinan di Alhambra, sebuah situs kerajaan di Spanyol.

Beberapa di antara artikel tentang kontribusi beliau dalam matematika dapat dibaca di dua tautan ini https://s.id/Escher1 dan https://s.id/Escher2. Cara lain, kalian dapat memindai kode batang berikut.

Berdasarkan dua artikel tersebut, rangkum dan ekspresikan pendapat kalian tentang peran M. C. Escher dalam pengembangan matematika. Ceritakan kembali dalam bentuk tulisan, video pendek, ataupun rekaman audio. Jika memiliki keterbatasan dalam bahasa Inggris, manfaatkan Google Translate.

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Komposisi dari pencerminan terhadap garis $y=x$ dan pencerminan terhadap garis $y=-x$ ekuivalen dengan pencerminan terhadap sumbu X.

2. *Benar atau salah.* Komposisi dari dua buah translasi adalah sebuah translasi.

3. *Benar atau salah.* Sebuah translasi dapat dinyatakan sebagai komposisi dari dua buah pencerminan.

Penerapan Konsep

4. Misalkan, T_1 menyatakan operasi pencerminan terhadap sumbu X, sedangkan T_2 menyatakan operasi pencerminan terhadap sumbu Y.

   a. Transformasi tunggal apakah yang ekuivalen dengan $T_2 \circ T_1$?

   b. Apa peta dari $P(a,b)$ dari transformasi ini?

5. Carilah matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu Y dilanjutkan dengan setengah putaran terhadap pusat.

Definisi Pencerminan: Pencerminan σ untuk sebuah titik P pada bidang Kartesius terhadap garis m, yang dinotasikan sebagai σ_m, adalah sebuah relasi yang didefinisikan sebagai

$$\sigma_m(P(x,y)) = \begin{cases} P(x,y), \text{ jika } P(x,y) \text{ di } m \\ Q(x,y), \text{ jika } P(x,y) \text{ tidak di } m, \text{ dan } m \text{ merupakan garis sumbu dari segmen } \overline{PQ} \end{cases}$$

Definisi Setengah Putar: Jika $P(a,b)$, maka setengah putar terhadap titik P yang dinotasikan sebagai σ_p, adalah sebuah relasi yang memetakan titik (x,y) ke titik (x',y') dengan titik $P(a,b)$ sebagai titik tengah dari keduanya.

Aljabar dari Setengah Putar: operasi setengah putar σ_p, dengan $P(a,b)$, memenuhi persamaan

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}.$$

Dengan kata lain, $\sigma_p(x, y) = (-x+2a, -y+2b)$.

Definisi Translasi: Diketahui vektor (a,b). Maka, translasi berkaitan dengan vektor (a,b), yang dinotasikan sebagai $\tau_{(a,b)}$ untuk sebarang titik (x,y) didefinisikan sebagai $\tau_{(a,b)}(x,y) = (x+a, y+b)$.

Definisi Rotasi: Diketahui titik C dan sudut berarah $\theta°$. Rotasi dengan titik pusat C sebesar $\theta°$, yang dinotasikan dengan $\rho_{c,\theta}$, didefinisikan sebagai sebuah transformasi yang memetakan titik C ke dirinya sendiri dan memetakan sebarang titik lain P ke titik P' sedemikian rupa sehingga dua kondisi terpenuhi:

- $CP = CP'$
- θ merupakan ukuran sudut berarah dari sudut berarah yang terbentuk dari sinar $\overrightarrow{CP'}$ dan $\overrightarrow{CP}$.

Matriks Rotasi: Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar θ radian terhadap titik pusat O adalah

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Tabel Matriks berkaitan dengan pelbagai macam transformasi

No	Prapeta	Transformasi	Matriks dan Operasinya
1.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
2.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Refleksi sumbu X	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Refleksi sumbu Y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Refleksi garis $y=x$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

No	Prapeta	Transformasi	Matriks dan Operasinya
5.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Refleksi garis $y=-x$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
6.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Refleksi garis $x=k$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k \\ 0 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Refleksi garis $x=h$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2h \end{bmatrix}$
8.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Refleksi terhadap titik $P(a,b)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
9.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Setengah putar terhadap titik asal (0,0)/ refleksi terhadap titik asal (0,0)	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Rotasi sebesar sudut θ terhadap titik asal (0,0)	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
11.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Rotasi sebesar sudut θ terhadap titik $P(a,b)$	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
12.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Dilatasi $[P(a,b),k]$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	Dilatasi dengan faktor k terhadap titik asal (0,0)	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Matriks berkaitan dengan komposisi transformasi: Misal, matriks yang berkaitan dengan transformasi T_1 dan T_2 berturut-turut adalah $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}$. Maka, matriks yang terkait dengan komposisi transformasi $T_2 \circ T_1$ (Transformasi T_1 dilanjutkan dengan T_2) adalah

$$\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

Uji Pemahaman

Benar atau Salah. Tentukan apakah pernyataan nomor 1 – 5 berikut benar atau salah.

1. Dilatasi selalu mempertahankan jarak antara dua titik di prapeta dan hasil transformasinya.
2. Rotasi selalu memetakan segitiga menjadi segitiga dan dan petanya selalu kongruen dengan prapeta.
3. Peta dari (x,y) oleh pencerminan terhadap sumbu X adalah $(-x,y)$.
4. $(-x,y)$ adalah peta dari titik $(-x,-y)$ yang dirotasikan sebesar 180° terhadap titik asal (0,0).
5. Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar 45° terhadap titik pusat adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Isian Singkat. Isilah titik-titik pada nomor 6 – 9 sehingga pernyataan pada nomor tersebut menjadi lengkap dan benar.

6. Komposisi dari dua buah translasi adalah . . . .
7. Sebuah segitiga jika dicerminkan terhadap sumbu Y akan menjadi . . . .
8. Matriks yang terkait dengan rotasi sebesar 270° terhadap titik pusat adalah . . . .
9. Matriks yang terkait dengan komposisi transformasi yang dimulai dengan rotasi sebesar 90° terhadap titik pusat dan dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu X adalah . . . .

Penerapan

Isian Singkat

10. Titik $M(2,-3)$ dicerminkan terhadap sumbu X, kemudian terhadap sumbu Y akan menghasilkan bayangan $M'=$ ....

11. Garis $2x+3y=-6$ ditranslasikan dengan vektor $\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$ dan dilanjutkan dengan vektor $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$. Bayangannya adalah ...

12. Titik $A(6,4)$ direfleksikan terhadap garis $2x+y=1$. Bayangan titik $A(6,4)$ adalah ....

13. Lingkaran $L\equiv x^2+y^2-2y-3=0$ didilatasi oleh $[O\ (0,0),3]$. Luas bayangan lingkaran L sama dengan ... satuan luas. (Kinomatika 2014)

14. Bayangan titik $P(x,y)$ yang ditranslasi oleh vektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh pencerminan terhadap $y=k$ ditentukan oleh persamaan matriks transformasi langsung berbentuk ....

Uraian.

15. Tentukan matriks-matriks yang berkaitan dengan rotasi terhadap terhadap titik asal O sebesar
    a. $\frac{1}{3}\pi$ radian
    b. $\frac{2}{3}\pi$ radian

16. Hitunglah perkalian matriks $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

17. Tentukan hasil peta dari bentuk geometri berikut.
    a. Garis $2x-3y-2y+7=0$ yang ditransformasi oleh setengah putar terhadap titik asal (0,0).
    b. Kurva $y=x^3-2x^2+3x-4$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y.

18. Tentukan peta dari titik (6,5) jika dicerminakn terhadap garis $y=-x$ lalu dirotasikan 90°.

19. Tentukan peta dari titik $(x+2,3y)$ yang ditransformasikan dengan pencerminan terhadap sumbu Y dilanjutkan dengan setengah putaran terhadap titik pusat.

20. Tentukan peta dari garis $2x+3y+5$ yang ditransformasikan dengan pencerminan terhadap garis $y=-x$ dilanjutkan dengan rotasi terhadap titik pusat sebesar 180°.

21. Tentukan peta dari kurva $y=2x^2-3x+5$ yang ditransformasikan dengan pencerminan terhadap garis $y=x$ dilanjutkan dengan rotasi terhadap titik pusat sebesar 90°, dan kemudian ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Penalaran

22. Nyatakan persamaan sebuah parabola $y=2x^2-12x+19$ dalam bentuk $y=(a-h)^2+k$. Gunakan bentuk tersebut untuk menjelaskan bagaimana operasi-operasi transformasi dilakukan terhadap parabola $y=x^2$ sehingga menjadi $y=2x^2-12x+19$.

23. Buktikan dengan perkalian matriks bahwa operasi dilatasi $[O,2]$, dilabeli dengan transformasi D, dan pencerminan terhadap sumbu Y, dilabeli dengan transformasi C, memenuhi $D \circ C = C \circ D$.

24. Jelaskan mengapa suatu dilatasi terhadap titik pusat selalu komutatif dengan transformasi yang dapat dinyatakan dengan matriks 2×2.

25. Buktikan bahwa pencerminan terhadap garis $ax+by+c=0$ memetakan titik (x,y) ke

$$\left(x - \frac{2a\,(ax+by+c)}{a^2+b^2}, y - \frac{2b\,(ax+by+c)}{a^2+b^2}\right).$$

Modifikasi Motif Khas Daerah dengan Transformasi Geometri

Dalam proyek kali ini, kita akan bersama-sama mempelajari budaya kita dan warisan leluhur, baik yang ada di Indonesia maupun di negara lain. Selain itu, kita berharap mampu memanfaatkan pengetahuan kita yang telah dipelajari

dari bab ini untuk mengembangkan kebudayaan kita dengan memodifikasi ataupun mereka ulang karya seni terdahulu. Selain itu, kita akan belajar mengomunikasikan karya kita dalam bentuk tulisan, audio, ataupun video sehingga ide kita dapat dinikmati oleh banyak orang, dikembangkan lagi, dan menjadi pemicu inspirasi. Ikutilah beberap instruksi berikut:

Pertama, carilah referensi motif yang dapat berupa motif batik atau geometris maupun yang lain. Misalnya, kalian dapat mencari motif batik yang kalian suka ataupun motif batik khas daerah kalian. Kalian dapat pula mencari tahu batik dari daerah lain yang menurut kalian menarik. Alternatifnya, kalian dapat motif geometris atau floral yang terdapat pada situs sejarah ataupun bangunan-bangunan seperti istana kerajaan di Alhambra, atau tempat ibadah seperti masjid atau gereja.

Kedua, pelajari bentuk dasar dari berbagai motif yang kalian temukan dan tinjau dari sudut pandang transformasi geometri. Uraikan motif tersebut menjadi bagian-bagian yang lebih kecil dan sederhana. Sebagai inspirasi, baca dan ambil pengetahuan yang relevan dari dua sumber berikut. Pertama, artikel yang berjudul "*Learning Geometry and Values from Patterns: Ethnomathematics on the Batik Patterns of Yogyakarta, Indonesia.*" Untuk mengaksesnya, kalian dapat menggunakan fitur search di Google Scholar. Kedua, buku berjudul "*Islamic Geometric Patterns Their Historical Development and Traditional Methods of Construction.*" Jika tidak memiliki akses terhadap buku ini, alternatifnya, kalian dapat mencari gambar dengan kata kunci *Islamic Geometric Pattern* di Internet atau kalian telusuri karya-karya Jay Bonner.

Ketiga, kreasikan motif geometris, batik, ataupun floral sesuai dengan kreativitas kalian. Lakukan hal ini dengan menggunakan konsep-konsep yang telah dipelajari pada bab ini. Perlihatkan bukan hanya hasil akhir, tetapi juga proses mengkreasikan motif yang kaliat buat dalam beberapa tahap. Libatkan konsep transformasi dan koordinat kartesius dalam tahap-tahap ini agar lebih jelas. Gambarkan hasil motif ini secara utuh, bisa dalam bentuk lukisan di kertas maupun gambar digital dengan bantuan teknologi.

Keempat, jelaskan proses pembuatan motif karya kalian agar dapat dinikmati orang lain. Ceritakan asal-muasal inspirasi dari karya motif kalian. Ceritakan daerahnya, sejarahnya, maupun keunikannya dari berbagai sudut pandang. Hal ini dapat dilakukan dalam bentuk artikel ilmiah. Cara lain dapat dilakukan dengan merekam penjelasan kalian secara audio yang kemudian kalian buat postingan dalam bentuk *podcast*. Jika memungkinkan, kalian juga bisa mengkreasikan penjelasan kalian dalam bentuk video yang dapat di-*share* di pelbagai media sosial seperti YouTube, Instagram, Facebook, TikTok, Twitter, dan lain sebagainya. Libatkan teman kalian untuk berkomentar maupun mengapresiasi karyamu atau karya temanmu yang lain.

Ingat-ingat kembali pengalaman belajar kalian di bab ini. Setelah itu, refleksikan pengalaman belajar kalian tersebut dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut.

1. Sejauh mana manfaat yang dapat kalian rasakan setelah berdinamika di Bab 4 Transformasi Geometri? Ceritakan manfaat yang dapat kalian rasakan.
2. Strategi-strategi belajar seperti apa yang kalian gunakan untuk belajar di Bab 4 Transformasi Geometri? Apakah semua strateginya sudah membantu kalian untuk belajar secara optimal?
3. Sekarang, nilailah pembelajaran kalian sendiri di Bab 4 Transformasi Geometri ini dengan mencentang kolom-kolom yang sesuai pada tabel berikut.

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
Subbab A Transformasi				
1.	Saya dapat melakukan pencerminan terhadap sumbu X pada bidang Kartesius.			
2.	Saya dapat melakukan pencerminan terhadap sumbu Y pada bidang Kartesius.			

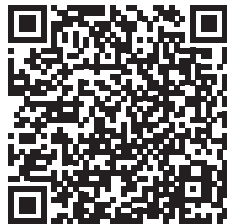
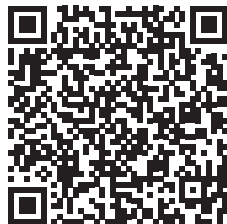
No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
3.	Saya dapat melakukan pencerminan terhadap garis $y=x$ pada bidang Kartesius.			
4.	Saya dapat melakukan pencerminan terhadap garis $y=-x$ pada bidang Kartesius.			
5.	Saya dapat melakukan pencerminan terhadap garis $x=k$ pada bidang Kartesius.			
6.	Saya dapat melakukan pencerminan terhadap garis $y=h$ pada bidang Kartesius.			
7.	Saya dapat melakukan pencerminan terhadap titik pada bidang Kartesius.			
8.	Saya dapat melakukan translasi pada bidang Kartesius.			
9.	Saya dapat melakukan rotasi pada bidang Kartesius.			
10.	Saya dapat melakukan dilatasi pada bidang Kartesius.			
Subbab B Kaitan Matriks dengan Transformasi				
11.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap sumbu X pada bidang Kartesius.			
12.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap sumbu Y pada bidang Kartesius.			
13.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap garis $y=x$ pada bidang Kartesius.			
14.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap garis $y=-x$ pada bidang Kartesius.			

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
15.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap garis $x=k$ pada bidang Kartesius.			
16.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap garis $y=h$ pada bidang Kartesius.			
17.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap titik pada bidang Kartesius.			
18.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari translasi pada bidang Kartesius.			
19.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari rotasi pada bidang Kartesius.			
20.	Saya mampu menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari dilatasi pada bidang Kartesius.			
Subbab C Komposisi Tansformasi dengan Matriks				
21.	Saya dapat menjelaskan konsep komposisi transfomasi.			
22.	Saya dapat menggunakan matriks serta operasinya untuk menentukan peta dari komposisi transformasi.			

Untuk mempelajari transformasi geometri secara lebih lanjut dan mendalam, ada beberapa buku sumber yang dapat di rujuk.

- "Modul Pembelajaran SMA Matematika Umum Kelas XI KD 3.5 dari Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan." Modul ini berisikan materi yang serupa. penilaian.sma.kemdikbud.go.id:8063/emodulsma/detail.php?id=MTA5
- *Geometri Transformasi* yang ditulis oleh Rawuh. Buku ini dapat digunakan untuk mempelajari Geometri Transformasi dengan pendekatan geometri Euclid.

- *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry* yang dikarang oleh George E. Martin. Buku ini mempelajari Geometri Transformasi dengan pendekatan geometri Euclid yang dikaitkan dengan aljabar abstrak. https://www.google.co.id/books/edition/Transformation_Geometry/gevlBwAAQBAJ?hl=en&gbpv=0.

- *M. C. Escher's Legacy: A Centennial Celebration.* Buku ini menyibak kejeniusan Escher dalam memadukan kerja seninya dalam bentuk lukisan dan pengetahunnya tentang matematika termasuk pengubinan dan transformasi. https://books.google.co.id/books/about/M_C_Escher_s_Legacy.html?id=uDZn6rDpwbQC&redir_esc=y

- *Islamic Geometric Patterns* karya Jay Bonner. Buku ini membahas simetri, transformasi, dan konsep Geometri lain yang dipadukan dengan banyak sekali terapan ke pola-pola Geometris yang dapat dibuat dengan otomasi di komputer. https://www.

google.co.id/books/edition/Islamic_Geometric_Patterns/o9IxDwAAQBAJ?hl=en&gbpv=0

- Channel youtube "Geometri" yang menjelaskan tentang berbagai macam permasalahan geometri. https://www.youtube.com/channel/UCzTkzNOD2OECJQ280-sEv7A

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA, 2021
Matematika Tingkat Lanjut
untuk SMA Kelas XI
Penulis: Al Azhary Masta, dkk.
ISBN: 978-602-244-770-2

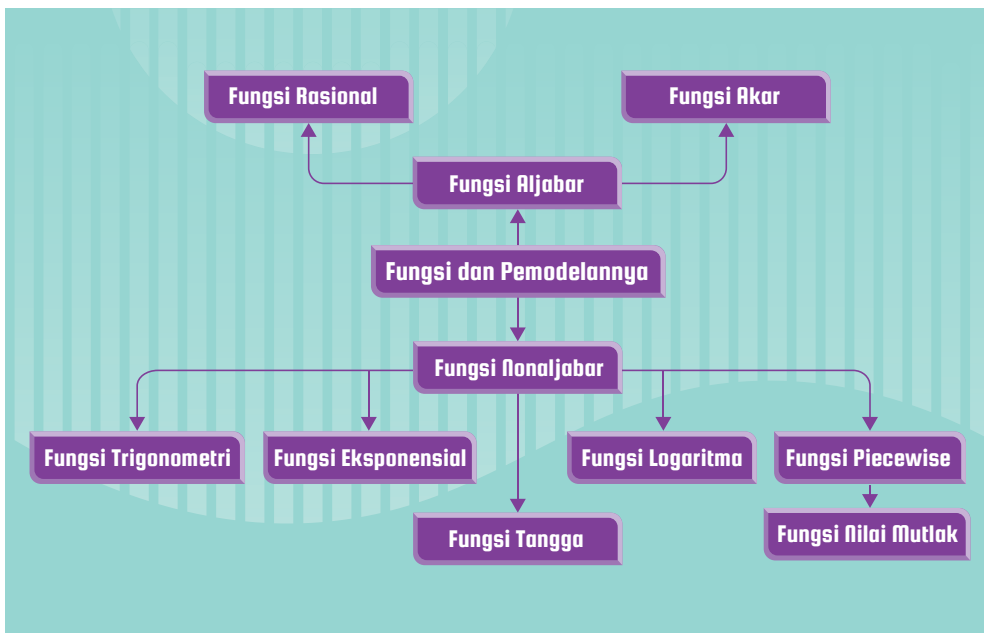
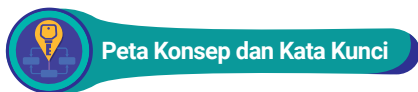
Bab 5

Fungsi dan Pemodelannya

Pada Maret 2021 kapal Ever Given tersangkut di Terusan Suez. Bagaimana salah satu fungsi yang dibahas dalam bab ini dapat digunakan untuk memodelkan fenomena alam yang turut membantu penyelamatan kapal tersebut?

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan memiliki kemampuan berikut ini.

- Menentukan nilai fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi aljabar dan fungsi non aljabar, serta menganalisis karakteristik grafiknya.
- Memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi aljabar dan fungsi non aljabar.

Kata Kunci

Fungsi Aljabar, Fungsi Non-Aljabar, Fungsi Rasional, Fungsi Akar, Fungsi Trigonometri, Fungsi Logaritma, Fungsi Eksponensial, Fungsi *Piecewise*, Fungsi Nilai Mutlak, Fungsi Tangga

Memahami Dunia di Sekitar Kita

Pernahkah kalian membayangkan untuk tinggal di negara lain? Kira-kira, apa saja yang berbeda dengan tempat tinggal kalian saat ini? Tentu, banyak yang berbeda. Salah satu hal yang bisa berbeda ialah lamanya hari, yaitu periode dari matahari terbit sampai matahari terbenam. Di bagian Proyek pada bab ini, kalian akan diajak untuk membandingkan lamanya hari di Kota Denpasar dengan Kota Perth.

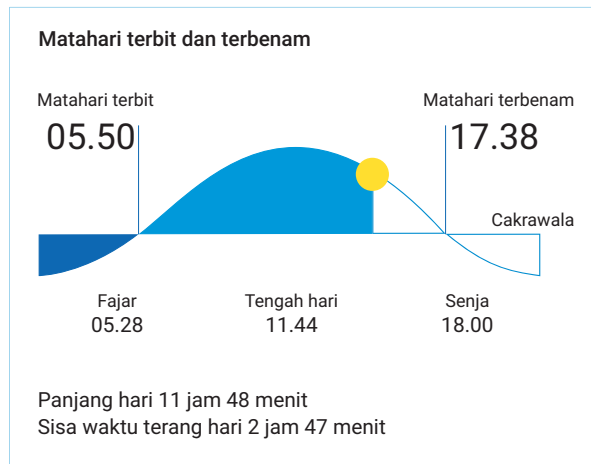
Gambar 5.1 Peta Lokasi Denpasar dan Perth.

Selain itu, banyak fenomena di sekitar kalian yang dapat dimodelkan dengan fungsi yang akan kalian pelajari di bab ini. Pemodelan tersebut dapat membantu kalian memahami dunia di sekitar kalian. Oleh karena itu, silakan mempelajari bab ini dengan penuh semangat!

A. Fungsi Trigonometri

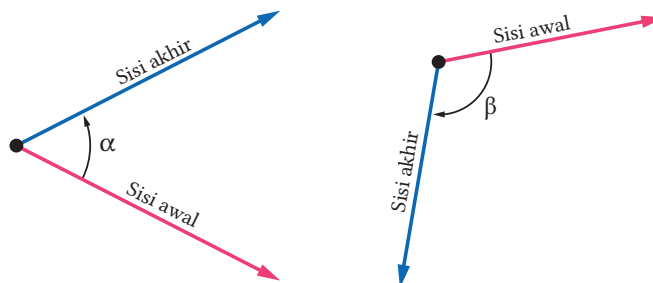
Seringkali, kita menjumpai fenomena di sekitar kita yang dapat direpresentasikan dengan baik menggunakan grafik. Untuk mengetahui salah satunya, kerjakan kegiatan eksplorasi berikut ini.

Posisi Matahari terhadap Cakrawala

Saat ini, kalian dapat melihat berita atau prakiraan cuaca dengan mudah melalui telepon pintar. Gambar 5.2 berikut ini memperlihatkan tampilan suatu situs web weather.com mengenai cuaca.

Gambar 5.2 Matahari Terbit dan Tenggelam

Cermati Gambar 5.2. Jelaskan apa yang dapat kalian tangkap dan maknai dari gambar tersebut.

Melalui aktivitas eksplorasi, kalian diperlihatkan informasi mengenai posisi matahari terhadap garis cakrawala. Posisi matahari tersebut dapat dimodelkan dengan fungsi yang akan kita pelajari di dalam subbab ini, yaitu fungsi trigonometri.

Ketika mempelajari trigonometri, sudut dapat dipandang sebagai perputaran suatu sinar garis dari sisi awal ke sisi akhir dengan pusat di pangkalnya. Jika perputarannya berlawanan arah putaran jarum jam, kita mendapatkan sudut positif. Sebaliknya, jika perputarannya searah putaran jarum jam, kita memperoleh sudut negatif. Perhatikan Gambar 5.3 berikut.

Gambar 5.3 Sudut Positif dan Sudut Negatif

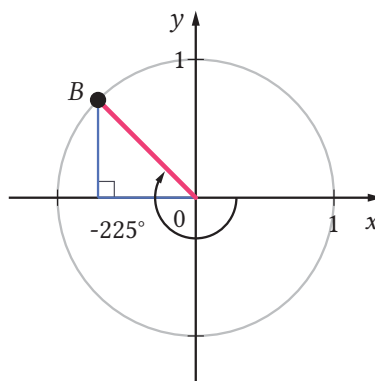
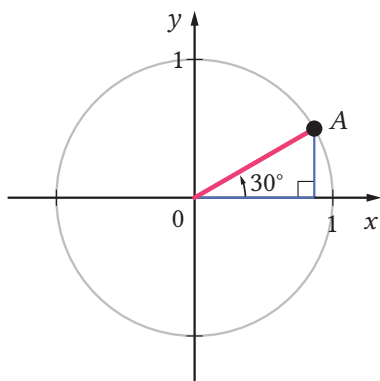
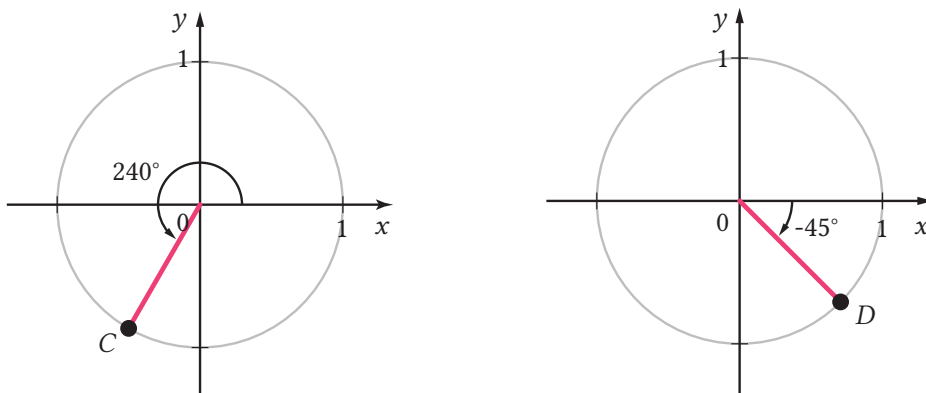
Pada Gambar 5.3, α adalah contoh sudut positif, sedangkan β adalah contoh sudut negatif. Arah perputaran kedua sudut tersebut digambarkan dengan anak panah.

1. Fungsi Trigonometri Sebarang Sudut

Di kelas X, kalian telah mempelajari perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku. Gunakan pengetahuan kalian tentang perbandingan trigonometri tersebut untuk melakukan aktivitas eksplorasi berikut.

Menentukan Koordinat Titik pada Lingkaran Satuan

Di dalam aktivitas eksplorasi ini, kalian akan menentukan koordinat titik-titik yang diberikan dengan menggunakan bantuan perbandingan trigonometri segitiga siku-siku.

1. Titik-titik *A*, *B*, *C*, dan *D* pada Gambar 5.4 berada pada lingkaran satuan, yaitu lingkaran yang berpusat di titik asal (0, 0) dan berjari-jari 1 satuan. Berdasarkan informasi yang diberikan pada gambar tersebut, tentukan koordinat titik-titik tersebut. (Perhatikan tanda, positif atau negatif, dari koordinat-koordinatnya.)

Gambar 5.4 Titik-Titik *A*, *B*, *C*, dan *D* pada Lingkaran Satuan

2. Berdasarkan perhitungan kalian di bagian 1, secara umum, bagaimana cara menentukan koordinat suatu titik yang berada pada lingkaran satuan jika diketahui besar sudutnya terhadap sumbu X positif?

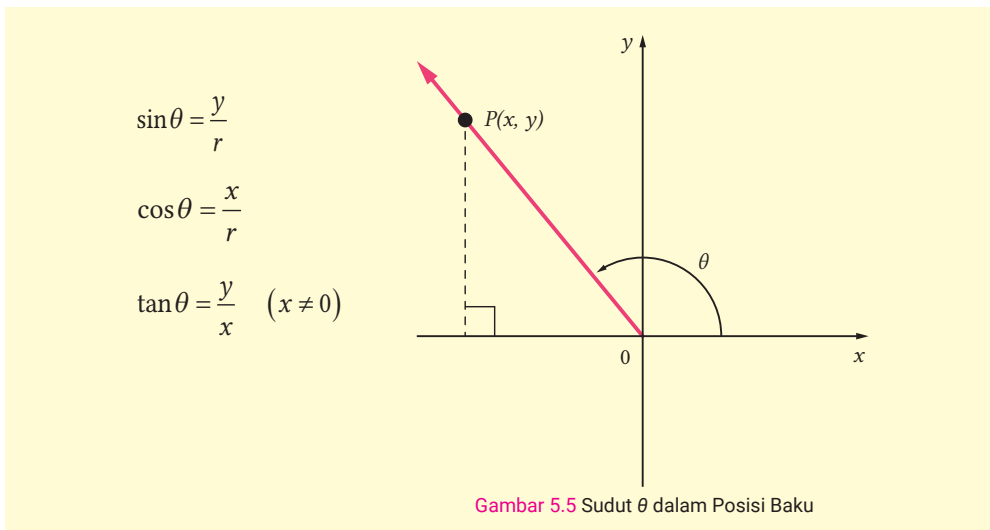
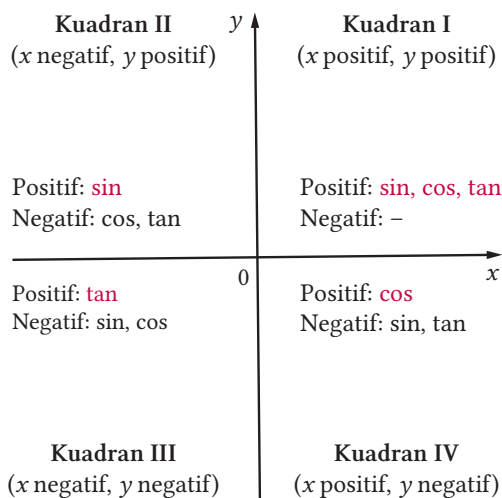
Jika kalian perhatikan, besar sudut-sudut pada aktivitas eksplorasi sebelumnya semuanya memiliki sisi awal sumbu X positif dan berpangkal di titik asal (0, 0). Sudut-sudut yang seperti ini disebut *sudut-sudut dalam posisi baku.*

Di aktivitas eksplorasi sebelumnya, kalian menggunakan perbandingan trigonometri segitiga siku-siku untuk menentukan koordinat titik-titik pada lingkaran satuan. Perbandingan trigonometri tersebut sekarang kita perluas definisinya agar dapat digunakan untuk sebarang sudut.

Definisi 5.1

Fungsi-Fungsi Trigonometri

Misalkan, θ adalah sudut dalam posisi baku dan $P(x, y)$ adalah titik yang berada pada sisi akhir sudut tersebut, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 5.5. Jika r adalah jarak antara titik asal ke titik P, maka fungsi-fungsi trigonometri sin θ, cos θ, dan tan θ didefinisikan sebagai berikut.

Gambar 5.5 Sudut θ dalam Posisi Baku

Berdasarkan Definisi 5.1, kita dengan mudah dapat menentukan tanda (positif atau negatif) dari nilai fungsi trigonometri untuk sudut tertentu. Untuk sudut-sudut dalam posisi baku yang sisi akhirnya di kuadran 2, misalnya, sebarang titik yang berada di sisi akhir sudut tersebut memiliki koordinat x negatif dan koordinat y positif. Karena r selalu positif, nilai sin θ di kuadran 2 positif, sedangkan nilai cos θ dan tan θ negatif. Tanda dari nilai fungsi-fungsi trigonometri di semua kuadran dirangkum pada Gambar 5.6 berikut.

Gambar 5.6 Tanda Fungsi-Fungsi Trigonometri di Semua Kuadran

Definisi 5.1 dan tanda fungsi-fungsi trigonometri pada Gambar 5.6 dapat digunakan untuk menentukan nilai fungsi trigonometri sebarang sudut. Untuk itu, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut.

Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

Di aktivitas eksplorasi ini, kalian akan menemukan cara bagaimana menentukan nilai fungsi trigonometri. Untuk melakukannya, kalian perlu mengingat perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa sebagai berikut.

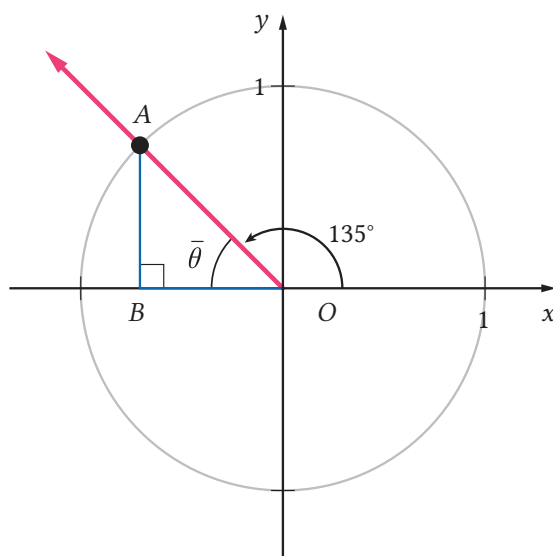
Tabel 5.1 Sudut-Sudut Istimewa

Sudut θ	sin θ	cos θ	tan θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

1. Dengan menggunakan Definisi 5.1, tentukan nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut $\theta = 0°$, 90°, 180°, dan 270°. Isikan hasilnya ke dalam tabel berikut.

Sudut θ	sin θ	cos θ	tan θ
0°			
90°			
180°			
270°			

2. Tentukan nilai sin θ, cos θ, dan tan θ dari sudut $\theta = 135°$. Untuk melakukannya, ikuti panduan berikut.
   a). Lukislah sudut 135° dalam posisi baku dan lingkaran satuan pada bidang koordinat. Kemudian, tandai titik A yang merupakan perpotongan lingkaran satuan dan sisi akhir sudut tersebut.

Lukis juga segitiga siku-siku bantuan yang bersesuaian. Hasilnya diperlihatkan pada Gambar 5.7.

Gambar 5.7 Sudut 135° dalam Posisi Baku

b). Tentukan besar sudut $\bar{\theta}$.

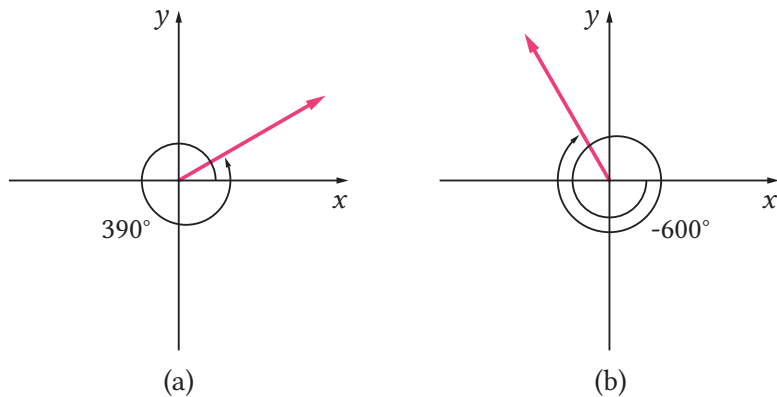
c). Dengan menggunakan perbandingan trigonometri segitiga siku-siku, tentukan koordinat titik *A*.

d). Tentukan jarak antara titik *A* dan titik asal dengan menggunakan Teorema Pythagoras, yaitu

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e). Dengan menggunakan hasil pada bagian (c), (d), dan Definisi 5.1, tentukan nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut $\theta = 135°$. Perhatikan tanda positif atau negatifnya.

f). Bandingkan hasilnya dengan nilai $\sin\bar{\theta}$, $\cos\bar{\theta}$, dan $\tan\bar{\theta}$.

3. Tentukan nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut $\theta = 240°$ dan $-45°$. (Gunakan cara seperti pada soal nomor 2.)
4. Tentukan nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut $\theta = 390°$ dan $-600°$. Sudut-sudut 390° dan $-600°$ ditunjukkan pada Gambar 5.8 (a) dan (b) berikut.

Gambar 5.8 Sudut-sudut 390° dan −600° dalam Posisi Baku

5. Tentukan nilai sin θ, cos θ, dan tan θ untuk sudut-sudut θ = 945° dan −1.110°.
6. Secara umum, bagaimana kalian menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri sebarang sudut?

Di aktivitas eksplorasi sebelumnya, kalian telah menemukan strategi untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sudut-sudut yang tidak hanya sudut-sudut lancip. Strategi tersebut dapat dirangkum dalam Sifat 5.1 berikut.

Sifat 5.1

Nilai Fungsi Trigonometri Sebarang Sudut

Misalkan, $\bar{\theta}$ adalah sudut lancip, yaitu $0° < \bar{\theta} < 90°$. Maka, nilai fungsi-fungsi trigonometri di kuadran 2 sampai 4 dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut.

Kuadran II

1. $\sin\left(180° - \bar{\theta}\right) = \sin\bar{\theta}$
2. $\cos\left(180° - \bar{\theta}\right) = -\cos\bar{\theta}$
3. $\tan\left(180° - \bar{\theta}\right) = -\tan\bar{\theta}$

Kuadran III

1. $\sin\left(180° + \bar{\theta}\right) = -\sin\bar{\theta}$

2. $\cos\left(180° + \bar{\theta}\right) = -\cos\bar{\theta}$

3. $\tan\left(180° + \bar{\theta}\right) = \tan\bar{\theta}$

Kuadran IV

1. $\sin\left(360° - \bar{\theta}\right) = \sin\left(-\bar{\theta}\right) = -\sin\bar{\theta}$

2. $\cos\left(360° - \bar{\theta}\right) = \cos\left(-\bar{\theta}\right) = \cos\bar{\theta}$

3. $\tan\left(360° - \bar{\theta}\right) = \tan\left(-\bar{\theta}\right) = -\tan\bar{\theta}$

Jika $0° < \theta < 360°$ dan k adalah sebarang bilangan bulat, nilai fungsi-fungsi trigonometri juga dapat ditentukan dengan rumus berikut.

1. $\sin\left(k \cdot 360° + \theta\right) = \sin\theta$

2. $\cos\left(k \cdot 360° + \theta\right) = \cos\theta$

3. $\tan\left(k \cdot 180° + \theta\right) = \tan\theta$

Untuk mengetahui bagaimana penggunaan Sifat 5.1, perhatikan Contoh 5.1 berikut.

Contoh 5.1

Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

Tentukan nilai dari sin 315°, cos 510°, dan tan (–840°).

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri yang diberikan, kita gunakan Sifat 5.1. Karena sudut 315° berada di kuadran 4, nilai sin 315° dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\sin 315° = \sin\left(360° - 45°\right) \quad 315° = 360° - 45°$$

$$= -\sin 45° \quad \text{Sifat 5.1}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \sin 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Nilai cos 510° dapat ditentukan dengan menggunakan fakta bahwa 510°=1·360°+150°.

$$\cos 510° = \cos\left(360° \cdot 1 + 150°\right) \quad 510° = 1 \cdot 360° + 150°$$

$= \cos 150°$ — Sifat 5.1
$= \cos(180° - 30°)$ — $150° = 180° - 30°$
$= -\cos 30°$ — Sifat 5.1
$= -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ — $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Terakhir, perhatikan bahwa $-840° = (-4) \cdot 180° + (-120°)$. Dengan demikian, nilai $\tan(-840°)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$\tan(-840°) = \tan[180° \cdot (-4) + (-120°)]$	$-840° = (-4) \cdot 180° + (-120°)$
$= \tan(-120°)$	Sifat 5.1
$= \tan(360° - 120°)$	Sifat 5.1
$= \tan 240°$	$360° - 120° = 240°$
$= \tan(180° + 60°)$	$240° = 180° + 60°$
$= \tan 60°$	Sifat 5.1
$= \sqrt{3}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$

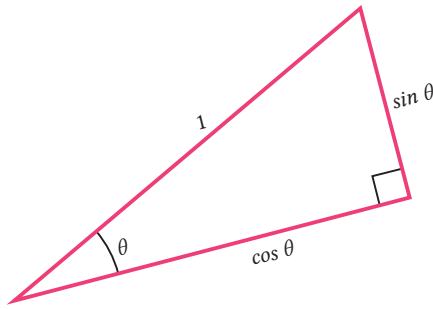
Carilah nilai $\cos(-60°)$, $\sin 450°$, dan $\tan(-1215°)$.

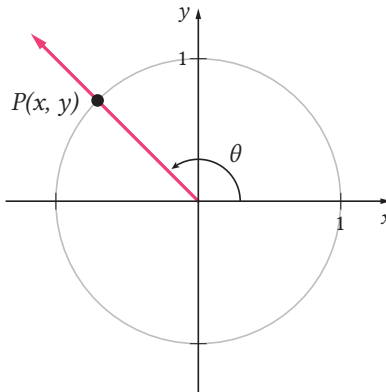
2. Identitas Trigonometri

Ketika belajar di Bab 2, kalian mengenal identitas polinomial. Di subbab ini, kalian akan belajar identitas trigonometri. Untuk itu, kerjakan aktivitas eksplorasi berikut untuk menemukan salah satu identitas trigonometri.

Menemukan Identitas Trigonometri

Di dalam aktivitas ini, kalian akan dipandu untuk menemukan salah satu identitas trigonometri. Untuk itu, lakukan langkah-langkah berikut ini.

1. Tunjukkan bahwa informasi yang ditunjukkan pada Gambar 5.9 berikut ini semuanya tepat.

Gambar 5.9 Perbandingan Trigonometri dalam Segitiga Siku-Siku

2. Dengan menggunakan segitiga siku-siku pada bagian 1, carilah hubungan antara sin θ, cos θ, dan 1.
3. Sementara ini, hubungan yang kalian temukan di bagian 2 hanya berlaku untuk sudut-sudut lancip. Hal ini dikarenakan hubungan tersebut kalian temukan dengan menggunakan segitiga siku-siku di bagian 1. Apakah hubungan itu juga berlaku untuk sebarang sudut θ? Selidikilah dengan menggunakan lingkaran satuan pada Gambar 5.10 berikut.

Gambar 5.10 Lingkaran Satuan dan Sudut θ

a). Nyatakan koordinat titik P ke dalam θ.

b). Tuliskan persamaan yang menyatakan jarak antara titik P dan titik asal (0, 0). Bandingkan persamaan tersebut dengan hubungan yang kalian dapatkan di bagian 2.

Di aktivitas eksplorasi sebelumnya, kalian telah mendapatkan salah satu identitas trigonometri. Identitas tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Karena kalian menggunakan teorema Pythagoras untuk menemukan identitas tersebut, identitas tersebut dinamakan *identitas Pythagoras*. Identitas ini beserta dengan identitas-identitas trigonometri lainnya dirangkum sebagai berikut.

Sifat 5.2

Identitas-Identitas Trigonometri Dasar

1). $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2). $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

3). $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

4). $\cos(-\theta) = \cos\theta$

5). $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Identitas-identitas nomor 3, 4, dan 5 tersebut merupakan generalisasi dari persamaan-persamaan dalam Sifat 5.1 bagian kuadran 4. Untuk mengetahui bagaimana penggunaan identitas-identitas trigonometri dasar, perhatikan Contoh 5.2 berikut ini.

Contoh 5.2

Menggunakan Identitas Trigonometri

Jika θ berada pada kuadran 2 dan $\sin\theta = \frac{4}{5}$, carilah nilai cos θ dan tan θ.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan cos θ, kita gunakan identitas Pythagoras.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	Identitas Pythagoras
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	Kurangi kedua ruas dengan $\sin^2\theta$
$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$	Akar kuadratkan
$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$	Substitusi sin θ = 4/5

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5} \qquad \text{Sederhanakan}$$

Karena θ di kuadran 2, cos θ bernilai negatif. Dengan demikian,

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

Selanjutnya, kita gunakan identitas kedua untuk menentukan nilai tan θ.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

Jika $\cos\theta = \frac{12}{13}$ dan 270° < θ < 360°, tentukan sin θ dan tan θ.

Kerjakan soal pada Contoh 5.2 dengan cara yang berbeda, yaitu dengan langsung menggunakan Definisi 5.1.

3. Grafik Fungsi Trigonometri

Pada bagian ini, kalian akan diajak untuk menggambar grafik fungsi trigonometri. Sebelum itu, kalian perlu mengenal ukuran sudut selain derajat, yaitu *radian*. Jika dalam derajat, ukuran sudut satu putaran penuh adalah 360°. Jika dalam radian, ukuran sudut satu putaran penuh adalah 2π rad (rad adalah penanda sudut yang dinyatakan dalam ukuran radian). Dengan demikian, 360° = 2π rad. Persamaan tersebut setara dengan tiga persamaan berikut.

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad}$$

Dengan kata lain, kita dapat mengubah ukuran sudut dari derajat ke radian dengan mengalikan $\pi/180$. Perhatikan contoh berikut.

$$60° = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Untuk mengonversi sudut dari ukuran radian ke derajat, kita kalikan sudut tersebut dengan $180/\pi$. Cermati contoh berikut.

$$\frac{\pi}{4} \text{rad} = \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 45°$$

Tidak seperti derajat yang penulisannya selalu disertai dengan tanda °, penulisan sudut dalam radian biasanya tidak disertai dengan penanda rad. Dengan demikian, jika kalian mendapati ukuran sudut yang tidak memiliki satuan atau penanda, sudut tersebut berarti dinyatakan dalam radian. Sebagai contoh, ukuran sudut dalam bentuk sin 75° merupakan sudut dalam derajat, sedangkan sin 75 sudutnya merupakan sudut dalam radian.

Ukuran radian tersebut umumnya digunakan dalam grafik fungsi trigonometri. Ketika ukuran sudut dalam radian tersebut diganti oleh variabel dalam fungsi trigonometri, variabel yang digunakan biasanya adalah x (sebelumnya kita menggunakan variabel θ). Bagaimana bentuk grafik fungsi-fungsi trigonometri? Silakan kerjakan aktivitas eksplorasi berikut.

Menggambar Grafik y = sin x dan y = cos x

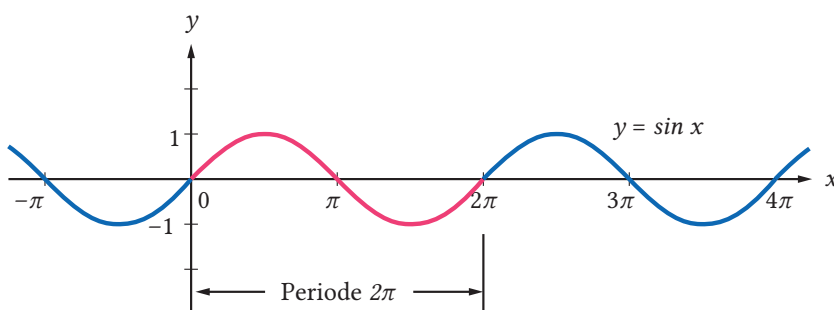
Di dalam aktivitas eksplorasi ini, kalian akan menggambar dan menganalisis grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$. Sebelum itu, ingat dalam Sifat 5.1 bahwa $\sin(k \cdot 360° + \theta) = \sin \theta$ dan $\cos(k \cdot 360° + \theta) = \cos \theta$. Hal ini dapat dituliskan kembali menjadi $\sin(k \cdot 360° + x) = \sin x$ dan $\cos(k \cdot 360° + x) = \cos x$. Dengan kata lain, nilai fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ tersebut berulang setiap 360° atau 2π. Dengan demikian, kita dapat mengatakan bahwa fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ periodik dengan periode 360° atau 2π.

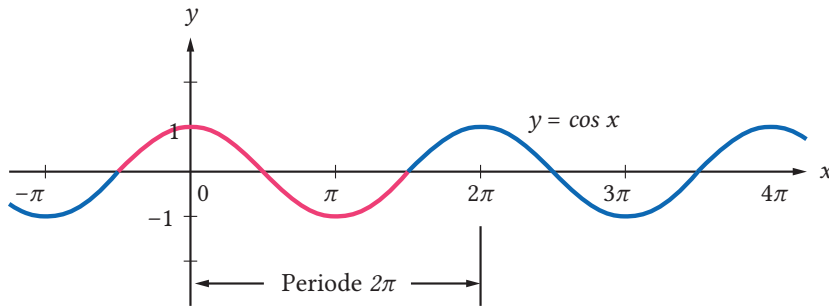
Selanjutnya, ikuti langkah-langkah berikut ini untuk menggambar grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$.

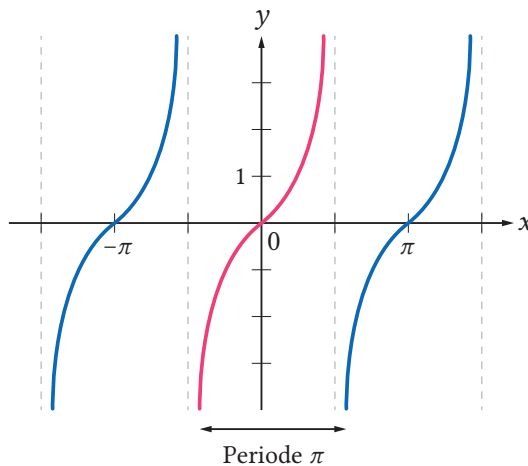
1. Lengkapi tabel berikut dengan nilai-nilai fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ dalam satu periodenya.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$													
$\cos x$													

2. Dengan menggunakan tabel pada bagian 1, gambarlah grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ dalam satu periodenya, yaitu $0° \leq x \leq 360°$.
3. Amplitudo dari suatu fungsi periodik adalah setengah dari nilai maksimum dikurangi nilai minimumnya. Berdasarkan grafik yang telah kalian gambar di bagian 2, tentukan amplitudo dari $y = \sin x$ dan $y = \cos x$.

Melalui aktivitas eksplorasi sebelumnya, kalian telah mengetahui grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$. Secara umum, grafik fungsi $y = \sin x$ ditunjukkan pada Gambar 5.11. Grafik fungsi tersebut memiliki periode 360° atau 2π. Meskipun demikian, grafiknya dapat diperpanjang ke kiri dan ke kanan karena daerah asal fungsi ini adalah himpunan semua bilangan real. Karena nilai maksimum dan minimumnya secara berturut-turut adalah 1 dan −1, amplitudonya adalah $(1 - (-1))/2 = 1$. Implikasi lainnya, daerah hasil fungsi $y = \sin x$ adalah $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Selain itu, kita dapat mencermati bahwa grafik fungsi tersebut simetris terhadap titik asal.

Gambar 5.11 Grafik Fungsi $y = \sin x$

Grafik fungsi $y = \cos x$ ditunjukkan pada gambar 5.12. Periode dan amplitudo fungsi ini sama dengan periode dan amplitudo fungsi $y = \sin x$. Periodenya 360° atau 2π dan amplitudonya 1. Selain itu, fungsi ini memiliki daerah asal himpunan semua bilangan real dan daerah hasil $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Fungsi $y = \cos x$ simetris terhadap sumbu Y.

Gambar 5.12 Grafik Fungsi $y = \cos x$

Lalu, bagaimana dengan grafik fungsi $y = \tan x$? Dengan menggunakan Sifat 5.1, yaitu $\tan(180° \cdot k + \theta) = \tan \theta$, fungsi $y = \tan x$ memiliki periode 180° atau π. Dengan menentukan nilai-nilai fungsinya, kalian akan melihat bahwa fungsi ini tidak terdefinisi ketika $x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots, \pi/2 + k \cdot \pi$. Dengan demikian, daerah asal fungsi ini adalah $\{x \mid x \neq \pi/2 + k\pi$ untuk k bilangan bulat$\}$. Daerah hasil fungsi $y = \tan x$ adalah himpunan semua bilangan real. Grafik fungsi $y = \tan x$ diperlihatkan pada Gambar 5.13 berikut ini.

Gambar 5.13 Grafik Fungsi $y = \tan x$

Sekarang, mungkin kalian bertanya-tanya, apakah amplitudo dan periode fungsi-fungsi trigonometri dapat berubah-ubah? Jawaban pertanyaan ini dipaparkan dalam Sifat 5.3 berikut.

Sifat 5.3

Amplitudo dan Periode

Untuk fungsi-fungsi yang berbentuk $y = a \sin bx$ dan $y = a \cos bx$, amplitudonya adalah $|\, a \,|$ dan periodenya adalah $\frac{360^\circ}{|b|}$ atau $\frac{2\pi}{|\, b \,|}$.

Untuk fungsi-fungsi yang berbentuk $y = a \tan bx$, amplitudonya tidak ada dan periodenya $\frac{180^\circ}{|b|}$ atau $\frac{\pi}{|b|}$.

Aktivitas Interaktif

Untuk menyelidiki bagaimana pengaruh bilangan a dan b terhadap grafik $y = a \sin bx$, kerjakan aktivitas interaktif berikut ini. Pindailah kode batang atau bukalah tautan berikut: https://www.desmos.com/calculator/1hazrovhco

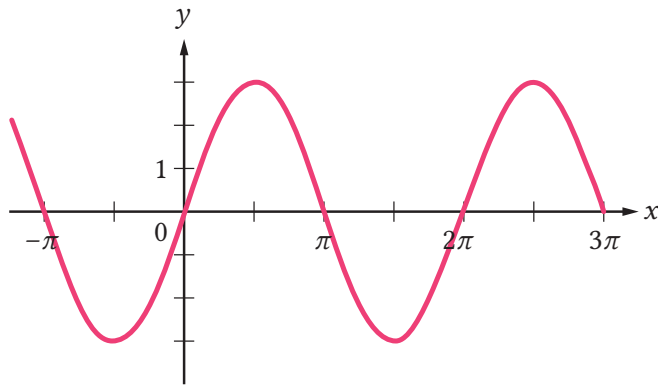
Untuk lebih memahami mengenai grafik fungsi trigonometri beserta dengan amplitudo dan periodenya, perhatikan Contoh 5.3 berikut.

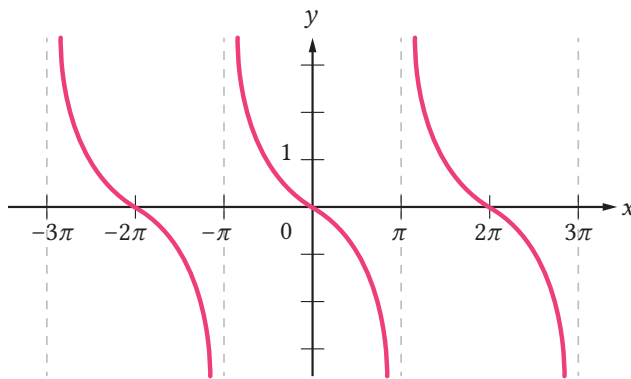
Contoh 5.3

Mensketsa Grafik Fungsi Trigonometri

Tentukan amplitudo, jika ada, dan periode dari $y = 3 \sin x$ dan $y = \tan\left(-\frac{1}{2}x\right)$, kemudian sketsalah grafik kedua fungsi tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Amplitudo dari fungsi $y = 3 \sin x$ adalah $|\, 3 \,| = 3$, periodenya adalah $2\pi/1 = 2\pi$. Grafik fungsi ini ditunjukkan oleh Gambar 5.14 berikut.

Gambar 5.14 Grafik $y = 3 \sin x$

Fungsi $y = \tan\left(-\frac{1}{2}x\right)$ tidak memiliki amplitudo dan periodenya $\frac{\pi}{\left|-1/2\right|} = 2\pi$. Grafik fungsi ini diperlihatkan pada Gambar 5.15 berikut.

Gambar 5.15 Grafik $y = \tan\left(-\frac{1}{2}x\right)$

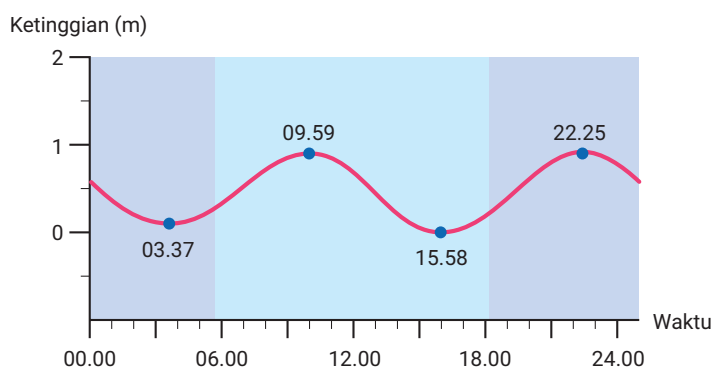
Sketsalah grafik $y = \sin 3x$ dan $y = -2 \cos x$.

Fungsi trigonometri yang telah kalian pelajari memiliki kegunaan untuk memodelkan dan memprakirakan ketinggian pasang surut air laut. Untuk mengetahuinya, baca kolom Matematika dan Sains berikut ini.

Gelombang Pasut Menyelamatkan Kapal yang Tersangkut

Gambar 5.16 Sebuah Kapal Tersangkut di Terusan Suez.
Sumber: http://eol.jsc.nasa.gov/

Pada Maret 2021, dunia digemparkan dengan berita kapal Ever Given yang tersangkut di Terusan Suez (lihat Gambar 5.16). Tersangkutnya kapal tersebut menghalangi kapal-kapal lain menggunakan Terusan Suez untuk keperluan perdagangan. Tak ayal, kejadian ini untuk sementara waktu mengganggu aktivitas ekonomi global. Setelah enam hari, kapal tersebut akhirnya dapat diselamatkan dan aktivitas transportasi di Terusan Suez dapat berjalan dengan normal kembali. Tahukah kalian, fenomena alam apa yang membantu proses penyelamatan kapal tersebut? Fenomena alam tersebut adalah gelombang pasang surut air laut.

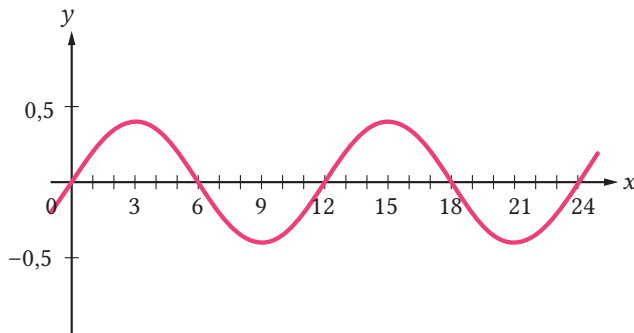
Gelombang pasang terjadi karena adanya gaya gravitasi yang disebabkan oleh bulan dan matahari. Gaya gravitasi tersebut dapat menarik perairan sehingga permukaan airnya lebih tinggi dari biasanya. Kejadian alam ini menyebabkan perairan di belahan dunia lain menjadi surut. Karena setiap waktunya bulan berevolusi mengelilingi bumi, ketinggian permukaan di suatu perairan juga mengalami pasang surut secara periodik. Sebagai ilustrasi, Gambar 5.15 berikut menyajikan ketinggian permukaan perairan di Port Said (ujung utara Terusan Suez) ketika kapal Ever Given diselamatkan. Data yang digunakan pada Gambar 5.17 tersebut diperoleh dari situs web pasanglaut.com.

Gambar 5.17 Ketinggian Permukaan Air Laut di Port Said

Apakah kalian familier dengan pola ketinggian permukaan air yang ditunjukkan pada Gambar 5.15? Pola tersebut memiliki ketinggian maksimum dan minimum secara periodik. Hal ini mirip dengan karakteristik fungsi sinus dan cosinus yang kalian pelajari di subbab ini. Oleh karena itu, kedua fungsi ini sangat bermanfaat untuk memodelkan fenomena pasang surut air laut.

Setelah kalian membaca penggunaan fungsi trigonometri dalam Matematika dan Sains di atas, sekarang cermati Contoh 5.4 berikut.

Contoh 5.4

Penerapan Fungsi Trigonometri

Pada suatu hari, ketinggian permukaan air Teluk Kupang 0,4 m di atas rata-rata permukaan airnya ketika pasang dan menjadi 0,4 di bawah rata-rata ketika surut. Pada hari itu, teluk ini mengalami dua kali pasang dan dua kali surut. Pada pukul 00.00, ketinggian permukaan air pada teluk ini sama dengan ketinggian rata-ratanya. Grafik ketinggian (dalam m) permukaan air Teluk Kupang tersebut setiap x jam setelah pukul 00.00 digambarkan pada Gambar 5.18 berikut.

Gambar 5.18 Ketinggian Permukaan Air Teluk Kupang

a). Carilah fungsi $y = a \sin bx$ yang memodelkan ketinggian permukaan air Teluk Kupang setiap waktunya.

b). Dengan menggunakan fungsi pada bagian (a), perkirakan ketinggian permukaan air teluk tersebut pada pukul 16.00.

Alternatif Penyelesaian

a). Berdasarkan informasi dari soal dan grafik pada Gambar 5.18, kita dapat melihat bahwa amplitudo fungsi adalah 0,4 dan periodenya adalah 12. Dengan demikian, fungsi yang memodelkan ketinggian air Teluk Kupang setiap waktunya adalah sebagai berikut.

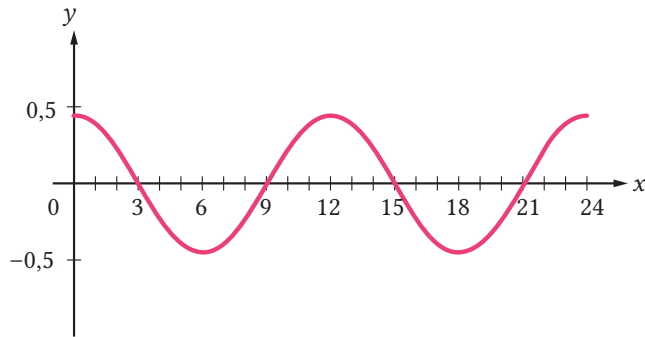
$$y = 0,4 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

b). Dengan mensubstitusikan $x = 16$, kita memperoleh nilai fungsi sebagai berikut.

$$y = 0,4 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 16\right) = 0,4 \sin\left(\frac{8}{3}\pi\right) = 0,4\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{5}\sqrt{3} \approx 0,35$$

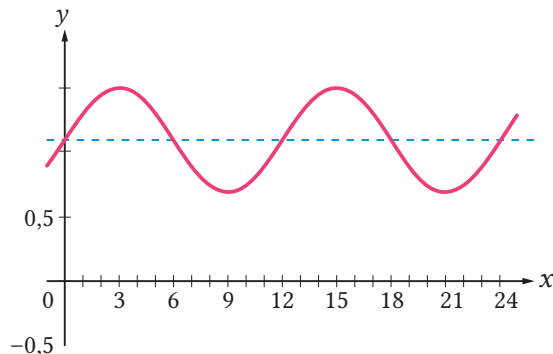
Jadi, ketinggian permukaan air Teluk Kupang pada pukul 16.00 adalah sekitar 0,35 m di atas tinggi rata-ratanya.

Ketika bulan sabit di awal Juni 2021, selisih ketinggian antara permukaan air pasang dan surut laut Kota Ambon adalah 0,9 m. Pada saat itu, pasang

laut terjadi tengah malam, yaitu pukul 00.00, dan tengah hari, yaitu pukul 12.00. Ketinggian permukaan laut terhadap ketinggian rata-rata setiap x jam setelah tengah malam direpresentasikan pada Gambar 5.19 berikut.

Gambar 5.19 Ketinggian Permukaan Air Laut Kota Ambon

a). Tentukan fungsi $y = a \cos bx$ yang grafiknya ditunjukkan pada Gambar 5.19.

b). Perkirakan ketinggian permukaan laut di Kota Ambon pada pukul 07.00.

Ketinggian permukaan air Teluk Kupang pada Contoh 5.4 diukur dari ketinggian rata-rata permukaan airnya. Tahukah kalian bahwa ada cara lain melakukannya? Cara lain untuk mengukur ketinggian tersebut adalah menggunakan surutan peta. Surutan peta ini merupakan permukaan terendah massa air yang digunakan sebagai acuan dalam pengukuran kedalaman di peta. Jika acuan pengukurannya menggunakan surutan peta, ketinggian permukaan Teluk Kupang ditunjukkan pada Gambar 5.20 berikut.

Gambar 5.20 Ketinggian Permukaan Air Teluk Kupang terhadap Surutan Peta

Grafik yang ditunjukkan pada Gambar 5.20 tersebut memiliki persamaan fungsi $y = 0,4\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 1,1$. Garis putus-putus pada gambar 5.20 disebut garis tengah dari fungsi trigonometri tersebut. Garis tengah tersebut memiliki persamaan $y = 1,1$. Jika kalian cermati persamaan garis tengah ini, apakah ada hubungannya dengan persamaan fungsi trigonometri $y = 0,4\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 1,1$?

Sifat 5.4

Garis Tengah

Fungsi trigonometri yang berbentuk $y = a\sin(bx) + c$, $y = a\cos(bx) + c$, dan $y = a\tan(bx) + c$ memiliki garis tengah dengan persamaan $y = c$.

Garis tengah yang dipaparkan pada Sifat 5.4 tersebut berguna untuk mensketsa atau menganalisis grafik fungsi-fungsi trigonometri.

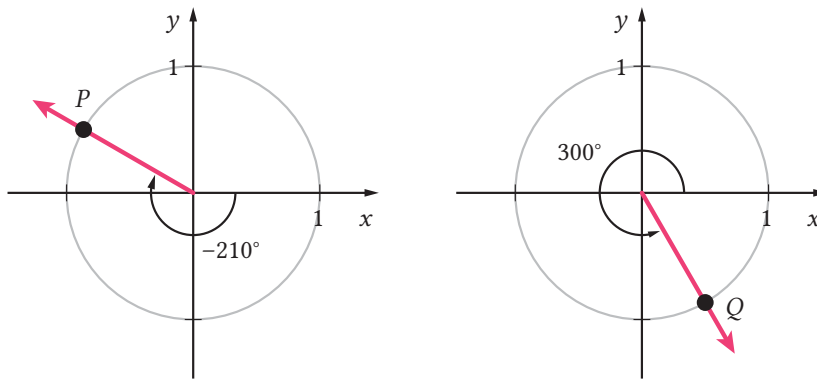
Fungsi Trigonometri

Kerjakan soal-soal latihan berikut dengan tepat!

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau Salah.* Jika sudut θ berada dalam posisi baku dan sisi akhirnya melalui titik (−2, 5), maka nilai tan $\theta = -2/5$.
2. *Benar atau Salah.* Jika nilai sin $\theta = 1/3$, maka θ berada pada kuadran 1.
3. Untuk sebarang sudut θ, $1 - \sin^2\theta =$ . . .
4. Periode grafik fungsi $y = \tan x$ adalah . . .
5. Grafik fungsi $y = a \sin bx$ memiliki amplitudo . . . dan periode . . . .

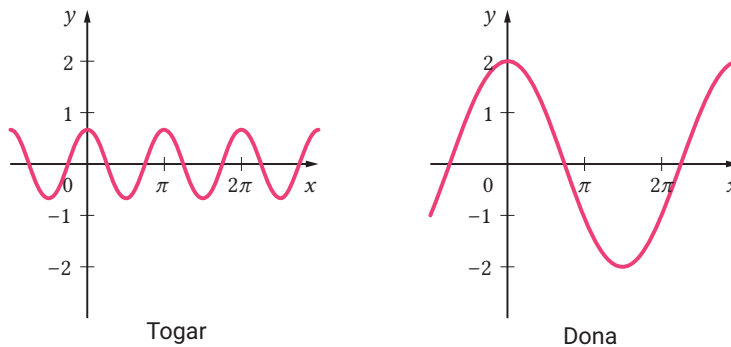
Penerapan Konsep

6. Titik P dan titik Q berada pada lingkaran satuan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.21.

Gambar 5.21 Titik *P* dan *Q* pada Lingkaran Satuan

Tentukan koordinat titik P dan titik Q tersebut.

7. Tentukan nilai sin(−30°), cos 225°, dan tan 870°.
8. Jika $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ dan $\tan \theta = -3$, tentukan nilai $\sin \theta$ dan $\cos \theta$.
9. Buktikan bahwa $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) = \sin^2\theta$.
10. Tentukan amplitudo, jika ada, dan periode fungsi-fungsi berikut, kemudian sketsalah grafiknya.

    a). $y = \frac{1}{2}\cos x$

    b). $y = \tan\left(\frac{\pi}{10}x\right)$
11. Togar dan Dona menggambar grafik fungsi $y = 2\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ dan hasilnya diperlihatkan pada Gambar 5.22. Siapakah yang paling tepat? Jelaskan alasannya.

Gambar 5.22 Hasil Pengerjaan Togar dan Dona

12. Sebuah pelampung pendanda di suatu pantai bergerak naik turun mengikuti ombak. Jarak antara posisi tertinggi dan terendah pelampung tersebut adalah 1,6 m. Pelampung tersebut bergerak dari posisi tertinggi ke posisi terendah setiap 4 detik.

a). Anggap bahwa, ketika 0 detik, posisi awal pelampung tersebut tepat di tengah-tengah, kemudian bergerak ke atas menuju titik tertinggi. Carilah fungsi yang memodelkan ketinggian pelampung tersebut setiap detiknya.

b). Sketsalah grafik dari fungsi yang diperoleh di bagian (a).

c). Tentukan posisi pelampung tersebut 9 detik setelah posisi awalnya.

13. Sebuah kincir ria berdiameter 50 m dan membutuhkan waktu 15 menit untuk berputar satu putaran. Putaran kincir ria ini berlawanan arah putaran jarum jam.

    a). Jika seseorang mula-mula berada di puncak kincir ria tersebut, nyatakan ketinggian orang tersebut terhadap titik pusat kincir ria itu setiap menitnya.

    b). Tentukan ketinggian orang tersebut ketika kincir ria berputar selama 10 menit.

    c). Jika titik pusat kincir ria tersebut berada 27 m di atas permukaan tanah, modelkan ketinggian orang tersebut relatif terhadap permukaan tanah setiap menitnya.

14. Seseorang naik kincir ria. Ketinggian (dalam m) orang tersebut terhadap permukaan tanah setiap menitnya dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$h(t) = 24 + 22\sin\left(\frac{\pi}{7}t\right)$$

    a). Berapakah diameter kincir ria tersebut?

    b). Berapa lamakah waktu yang diperlukan kincir ria tersebut untuk menempuh satu putaran?

    c). Jika kincir ria tersebut berputar berkali-kali, sebutkan tiga waktu yang berbeda ketika orang tersebut berada di titik tertinggi kincir ria itu.

B. Fungsi Logaritma

Mengapa kita harus selalu di rumah selama pandemi Covid-19?

Gambar 5.23. Infografik Virus Covid-19

Tepat tanggal 2 Maret 2020, Presiden Joko Widodo mengumumkan terkonfirmasi dua orang terpapar Covid-19. Sejak saat itu, pembatasan kegiatan di luar rumah secara besar-besaran diberlakukan. Tujuannya untuk menekan penyebaran virus Covid-19 yang berkembang dengan pesat. Pemerintah terus berupaya untuk menekan penyebaran Covid-19 dengan mengimbau setiap orang untuk bisa menjaga jarak ketika berinteraksi dan selalu menjaga protokol kesehatan saat keluar rumah. Mungkin banyak yang bertanya, mengapa harus menjaga jarak saat berinteraksi dengan orang lain? Mengapa harus tetap berada di rumah dan tidak berpergian untuk hal yang tidak penting? Bagaimana penyebaran virus Covid-19 itu sebenarnya? Fungsi logaritma yang akan kita bahas pada subbab ini dapat digunakan untuk memberikan sebagian jawaban dari pertanyaan tersebut. Untuk itu, mari, pelajari subbab ini dengan sungguh-sungguh.

1. Konsep Fungsi Logaritma

Di kelas X, kalian telah mempelajari tentang fungsi eksponensial dan bentuk logaritma. Logaritma dianggap sebagai balikan dari bentuk eksponensial. Seperti yang telah kalian ketahui, bahwa fungsi eksponensial telah banyak diaplikasikan dalam berbagai hal di antaranya pemodelan pertumbuhan bakteri. Pada subbab ini, kita akan mempelajari pemodelan dari fungsi logaritma. Namun, sebelum itu, mari, kalian kerjakan aktivitas eksplorasi berikut.

Penyebaran Virus Covid-19

Misalkan, virus Covid-19 akan menular setiap 2 orang bertemu jika salah seorang di antaranya sudah terpapar Covid-19. Jika pada tanggal 2 Maret 2020 terdapat 2 orang yang terpapar Covid-19 di Indonesia dan dalam 60 hari kasus terkonfirmasi terpapar Covid-19 sebanyak 10.118 orang. Dari pemodelan yang menggunakan fungsi eksponensial, diperoleh banyaknya orang yang terpapar Covid-19 setiap saat waktu t adalah $P(t) = 2e^{\frac{1}{60}\ln(5059)}$.

Gunakan fungsi tersebut untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Berapakah waktu yang diperkirakan akan ada 50.000 orang yang terinveksi virus Covid-19?
2. Dapatkah kalian membuat suatu fungsi yang memodelkan waktu yang dibutuhkan terhadap banyaknya orang yang terpapar Covid-19? Bagaimana fungsinya?

Di aktivitas eksplorasi sebelumnya, kalian telah melihat bahwa perlu suatu fungsi yang "membalik" apa yang dilakukan oleh pemodelan fungsi eksponensial. Fungsi balikan demikian dinamakan *fungsi logaritma*. Karena bentuk logaritma merupakan balikan (invers) dari bentuk eksponensial, fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponensial. Secara umum, pendefinisian fungsi logaritma dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 5.2

Notasi Fungsi Logaritma

Misalkan b adalah bilangan positif dengan $b \neq 1$. Fungsi logaritma dengan basis b dinotasikan dengan ${}^{b}\log$ dan dinyatakan sebagai

$$f(x) = {}^{b}\log x \text{ untuk setiap } x > 0.$$

Pada beberapa buku lainnya, fungsi logaritma mungkin saja dinotasikan dalam bentuk $f(x) = \log_b x$. Namun, dalam buku ini, kita akan menggunakan

bentuk $f(x) = {}^{b}\log x$ untuk menyatakan fungsi logaritma. Fungsi logaritma yang basisnya 10 disebut *fungsi logaritma umum*. Untuk menuliskan logaritma umum, kita dapat menghilangkan basisnya, misalkan

$$^{10}\log 100 = \log 100.$$

Adapun logaritma dengan basis e dengan nilai e mendekati 2,7183 disebut *fungsi logaritma alami* dan dinotasikan dengan $f(x) = \ln x$, yaitu

$$\ln x = {}^{e}\log x.$$

Di kelas X, kalian telah mempelajari keterkaitan antara bentuk eksponensial dan logaritma, yakni sebagai berikut

$$y = {}^{b}\log x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^{y}$$

Keterkaitan tersebut akan banyak dimanfaatkan dalam membahas keterkaitan antara fungsi logaritma dan fungsi eksponensial. Untuk lebih memahami fungsi logaritma, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.5

Fungsi Logaritma

Diberikan fungsi logaritma $f(x) = {}^{3}\log x$. Tentukan nilai dari

(a) $f(3)$ (b) $f(81)$

Alternatif Penyelesaian

Kita dapat menyelesaikan soal ini dengan menggunakan definisi fungsi logaritma, yaitu ${}^{b}\log x = y$ berarti $b^{y} = x$.

a). $f(3) = {}^{3}\log 3 = 1$ karena $3^{1} = 3$.

b). $f(81) = {}^{3}\log 81 = 4$ karena $3^{4} = 81$.

Diberikan fungsi logaritma $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$. Tentukan nilai dari

(a) $f\left(\frac{1}{9}\right)$ (b) $f\left(\frac{1}{27}\right)$

Kalian telah mempelajari bentuk dari fungsi logaritma. Selanjutnya, kalian akan mempelajari bagaimana karakteristik dari fungsi logaritma. Karakteristik fungsi logaritma dapat diketahui dengan mudah jika kita menggambar grafiknya. Untuk itu, kegiatan eksplorasi berikut mengajak kalian untuk menggambar grafik fungsi logaritma dengan plot titik-titik.

Grafik Fungsi Logaritma

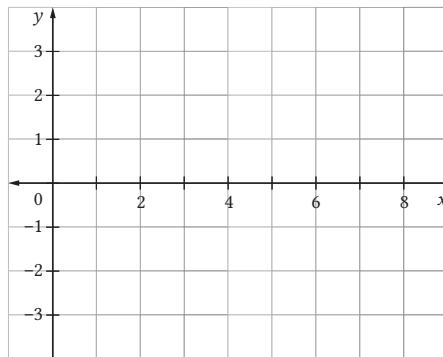
Tujuan kegiatan eksplorasi ini ialah untuk menggambar grafik fungsi logaritma. Dengan demikian, kalian akan mengetahui karakteristik fungsi tersebut. Fungsi yang akan kita gambar grafiknya ialah

$$f(x) = {}^{2}\log x$$

Untuk menggambar grafik fungsi tersebut, lakukan langkah-langkah berikut.

1. Lengkapi tabel berikut, yaitu untuk setiap nilai x yang diberikan pada baris pertama, tentukan nilai $f(x)$ pada baris kedua.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$							

2. Berdasarkan langkah 1, titik-titik $f(x)$ untuk nilai x yang diberikan adalah...
3. Plotlah titik-titik yang kalian temukan pada langkah 2 di Gambar 5.24

Gambar 5.24 Bidang Koordinat

4. Berdasarkan informasi yang kalian peroleh pada langkah 2 dan 3, sketsalah grafik fungsi $f(x) = {}^{2}\log x$ pada bidang koordinat di Gambar 5.24
5. Amati kembali grafik fungsi logaritma yang baru saja kalian gambar. Bagaimana karakteristiknya?

Di kegiatan eksplorasi sebelumnya, kalian telah menggambar grafik fungsi logaritma dengan basis lebih dari 1. Pada Contoh 5.6 berikut, kalian akan berlatih menggambar grafik fungsi logaritma dengan basis di antara 0 dan 1.

Contoh 5.6

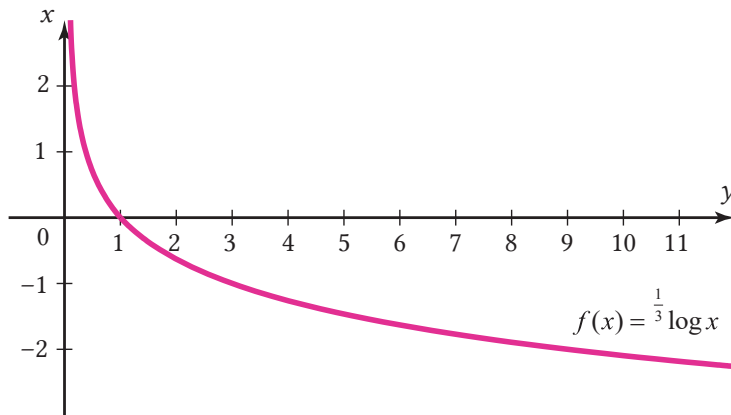
Menggambar Grafik Fungsi Logaritma

Sketsalah grafik fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$.

Alternatif Penyelesaian

Kita akan mensketsa grafik fungsi $f(x) = {}^{1/3}\log x$ dengan terlebih dahulu membuat tabel nilai-nilai fungsi $f(x)$ untuk x yang diberikan. Agar lebih mudah untuk mengambar grafik fungsi logaritma, kita pilih nilai-nilai x sehingga nilai dari $f(x)$ bilangan bulat.

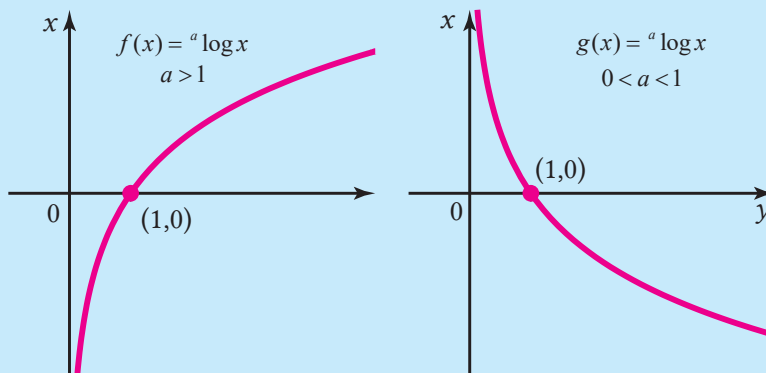
x	3^3	3^2	3	1	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}
$f(x)$	−3	−2	−1	0	1	2	3

Selanjutnya, gambar titik-titik yang dihasilkan pada tabel tersebut dan hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva halus untuk mendapatkan grafik f seperti yang diperlihatkan pada gambar 5.25.

Gambar 5.25 Grafik Fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$

Sketsalah grafik fungsi $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$.

Sampai di sini, kalian telah mempelajari cara menggambar grafik dari fungsi logaritma untuk basis lebih dari 1 dan basis di antara 0 dan 1. Grafik fungsi logaritma dengan basis lebih dari 1 mempunyai beberapa kesamaan dan beberapa perbedaan dengan grafik fungsi logaritma dengan basis berada di antara 0 dan 1. Perbedaan dan persamaan kedua grafik fungsi tersebut jika dilihat dari gambar grafiknya dapat dinyatakan dalam sifat berikut.

Sifat 5.5

Karakteristik Fungsi Logaritma

Gambar 5.26 Grafik Fungsi Logaritma

Misalkan, diberikan fungsi $f(x) = {}^a\log x$ untuk $a > 1$ dan $g(x) = {}^a\log x$ untuk $0 < a < 1$. Berdasarkan ilustrasi grafik fungsi di atas pada Gambar 5.26 diperoleh persamaan karakteristik dari f dan g sebagai berikut.

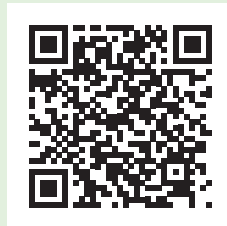
a). Daerah asal f dan g adalah himpunan semua bilangan real positif.
b). Daerah hasil f dan g adalah himpunan semua bilangan real.
c). Fungsi f dan g grafiknya memotong sumbu $-X$ di titik (1, 0), tetapi tidak memotong sumbu $-Y$.
d). Grafik fungsi f dan g mendekati, tetapi tidak menyentuh sumbu $-Y$. Dengan demikian, sumbu $-Y$ (atau $x = 0$) merupakan asimtot tegak dari f dan g.

Perbedaan karakteristik fungsi f dan g, yakni f adalah fungsi monoton naik, sedangkan fungsi g monoton turun.

Dari Contoh 5.6 sebelumnya, kalian telah melihat grafik fungsi logaritma. Untuk melakukan penyelidikan lebih jauh tentang grafik fungsi logaritma, kunjungi tautan aktivitas interaktif berikut.

Aktivitas Interaktif

Kunjungi aktivitas interaktif ini untuk mempelajari apa saja sifat fungsi logaritma. Pindailah kode batang atau tautan berikut.

https://www.desmos.com/calculator/b88kfy2b3c

2. Identitas Fungsi Logaritma

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mempelajari karakteristik dari fungsi logaritma. Di bagian ini, akan diulang kembali sifat-sifat dari logaritma yang telah kalian pelajari di kelas X. Untuk lebih memahami identitas fungsi logaritma, mari, kerjakan eksplorasi berikut.

Sifat Logaritma

Tujuan kegiatan eksplorasi ini ialah untuk memperlihatkan kembali sifat-sifat logaritma yang telah kalian pelajari kelas X. Untuk melakukannya, ikuti langkah-langkah berikut.

1. Dapatkah kalian menuliskan bentuk yang setara dari logaritma ${}^{b}\log(MN)$ dengan memanfaatkan identitas perkalian eksponen, yakni $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$. dan definisi logaritma?
2. Dapatkah kalian menuliskan bentuk yang setara dari logaritma ${}^{b}\log\left(\frac{M}{N}\right)$ dengan memanfaatkan pembagian eksponen, yakni $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ untuk $b \neq 0$?
3. Dapatkah kalian menuliskan bentuk yang setara dari logaritma ${}^{a}\log(M^p)$ dengan memanfaatkan identitas eksponen $(b^m)^n = b^{mn}$?

Berdasarkan eksplorasi sebelumnya yang dilakukan, diperoleh identitas logaritma sebagai berikut.

Sifat 5.6

Misalkan, b adalah bilangan positif dengan $b \neq 1$. Misalkan, M, N, dan p sebarang bilangan real dengan $M > 0$ dan $N > 0$.

1. ${}^{b}\log(MN) = {}^{b}\log M + {}^{b}\log N$
2. ${}^{b}\log\left(\frac{M}{N}\right) = {}^{b}\log M - {}^{b}\log N$
3. ${}^{b}\log(M^p) = p\,{}^{b}\log M$

Selain itu, terdapat beberapa identitas logaritma yang telah kalian ketahui di kelas X, yakni sebagai berikut.

Sifat 5.7

Identitas Logaritma

Misalkan, a dan b adalah bilangan positif dengan $a, b \neq 1$. Misalkan, M, N, dan p sebarang bilangan real dengan $M > 0$ dan $N > 0$.

1. ${}^{b}\log M = \dfrac{{}^{a}\log M}{{}^{a}\log b}$
2. Jika ${}^{b}\log M = {}^{b}\log N$, maka $M = N$.
3. Jika $b > 1$ dan ${}^{b}\log M < {}^{b}\log N$, maka $M < N$.
4. Jika $a < b < 1$ dan ${}^{b}\log M < {}^{b}\log N$, maka $M > N$.

Kalian sudah mengetahui sifat-sifat dari fungsi logaritma. Untuk memahami lebih dalam sifat-sifat tersebut, amati contoh berikut.

Contoh 5.7

Identitas Fungsi Logaritma

Dengan memanfaatkan identitas fungsi logaritma, selesaikan soal berikut.

a). Jika $f(x) = \log x$ maka tentukan nilai y sehingga $f(80) + f(y) = 4$.

b). Jika $f(x) = {}^{3}\log x$ dan nilai dari $f(5) \approx 1,46$, tentukan $f(75)$.

Alternatif Penyelesaian

a). Karena $f(80) + f(y) = f(80y) = \log 80y = 4$, diperoleh $80y = 10^4$. Akibatnya,

$$y = \frac{10^4}{80} = 125.$$

b). $f(75) = {}^{3}\log 75 = {}^{3}\log 3 \times 25 = {}^{3}\log 3 + {}^{3}\log 5^2 \approx 1 + 2(1,46) = 3,92$

Dengan memanfaatkan identitas fungsi logaritma, selesaikan soal berikut.

a). Jika $f(x) = \ln x$ maka tentukan nilai y sehingga $f(80) + f(y) = 4$

b). Jika $f(x) = {}^{2}\log x$ dan nilai dari $f(3) = 0,63$, tentukan $f(18)$.

Kalian telah mengetahui beberapa identitas fungsi logaritma. Berikan pendapat kalian, bagaimana identitas pada Sifat 5.7 berikut berlaku?

Pemodelan Fungsi Logaritma

Di awal subbab, kalian telah melakukan suatu aktivitas eksplorasi yang menarik. Eksplorasi yang menuntun kita untuk memahami pentingnya belajar logaritma. Fungsi logaritma banyak dimanfaatkan dalam berbagai penerapan kehidupan sehari-hari. Salah satu kegunaannya ialah memprediksi penyebaran virus Covid-19, seperti pada contoh berikut.

Contoh 5.8

Penyebaran Virus Covid-19

Pada pengantar subbab ini, sudah dijelaskan bahwa dalam upaya untuk menekan penyebaran virus Covid-19, setiap orang diharapkan membatasi interaksi secara langsung dengan orang lain. Mengapa? Misalkan, virus Covid-19 akan mampu membelah diri dalam setiap 30 menit di tenggorokan orang yang terinfeksi Covid-19. Jika awalnya terdapat 2 virus Covid-19, lama waktu t (dalam jam) yang dibutuhkan virus Covid-19 untuk menjadi sebanyak N ditentukan dengan rumus berikut.

$$t = \frac{\log(N/2)^2}{\log 2}$$

Berapa lama waktu yang dibutuhkan virus Covid-19 untuk berkembang menjadi satu juta virus?

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa waktu yang dibutuhkan untuk virus Covid-19 menjadi sebanyak satu juta virus Covid-19 adalah

$$t = \frac{\log(1.000.000/2)^2}{\log 2} = \frac{\log(500.000)^2}{\log 2} = 2\ {}^2\log 500.000 \approx 2(19) = 38 \text{ jam.}$$

Jadi, dalam waktu 38 jam, virus Covid-19 akan berkembang menjadi 1 juta virus. Agar dapat menekan penyebaran virus Covid-19, kalian harus tetap selalu berada di rumah.

Dengan memanfaatkan bentuk model fungsi logaritma tentang pertumbuhan virus Covid-19 pada Contoh 5.8, berapa banyak virus Covid-19 dalam waktu 30 hari?

Kekuatan Kata Sandi

Pada Bab III, kalian telah belajar bagaimana cara membuat kata sandi dengan memanfaatkan matriks. Namun, seberapa kuatkah kata sandi yang dibuat tersebut?

Kekuatan suatu kata sandi diukur dari ukuran efektivitas kata sandi terhadap serangan tebak-tebakan atau *brute force*. *Brute force* adalah perkiraan berapa banyak percobaan yang dibutuhkan seseorang yang tidak memiliki akses langsung ke kata sandi tersebut dan rata-rata untuk menebaknya dengan benar suatu kata sandi tersebut.

Kata sandi acak terdiri atas serangkaian simbol dengan panjang tertentu. Simbol tersebut diambil dari kumpulan simbol-simbol menggunakan proses pemilihan acak di mana setiap simbol memiliki kemungkinan yang sama untuk terpilih.

Sebuah sandi yang dihasilkan oleh proses yang secara acak dalam pemilihan string simbol dengan panjang L dari sekumpulan N simbol yang mungkin, maka jumlah kemungkinan kata sandi didapatkan dengan menaikkan jumlah simbol ke pangkat L, yaitu N^L. Meningkatkan L atau N akan memperkuat kata sandi yang dihasilkan. Kekuatan kata sandi acak yang diukur dengan entropi informasi hanyalah logaritma basis 2 dari jumlah

kata sandi yang mungkin. Asumsi setiap simbol dalam kata sandi dihasilkan secara independen. Jadi, entropi informasi sandi acak, *H*, diberikan oleh rumus:

$$H = {}^{2}\log N^{L} = L\,{}^{2}\log N = L\frac{\log N}{\log 2}$$

N adalah jumlah simbol yang mungkin dan *L* adalah jumlah simbol dalam kata sandi dan *H* diukur dalam bit.

Makin besar nilai dari entropi (*H*), akan makin kuat kata santi tersebut. Misalnya, kata sandi dengan entropi 4 bit akan membutuhkan 2^4 (16) percobaan untuk menghabiskan semua kemungkinan tebak-tebakkan pencarian kata sandi tersebut.

Sumber https://en.wikipedia.org/wiki/Password_strength

Contoh 5.9

Kekuatan Kata Sandi

Sebuah kata sandi yang terdiri atas 3 angka yang dipilih dari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 akan dibentuk. Berapa besar *entropi* kata sandi tersebut? Berapa banyak percobaan yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan pencarian kata sandi tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Karena simbol yang tersedia ada 10 (N = 10) dan panjang kata sandi terdiri atas 3 angka (L=3), entropi dari kata sandi tersebut adalah $H = 2\frac{\log 10}{\log 2} = 6{,}644$ bit. Dengan demikian, banyaknya percarian yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan adalah $2^{6,64}$=99,7≈100 percobaan.

Sebuah kata sandi yang terdiri atas tiga huruf akan dibentuk. Berapa besar *entropi* kata sandi tersebut? Berapa banyak percobaan yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan pencarian kata sandi tersebut?

Sekarang, kita akan melihat pemodelan dari fungsi logaritma yang dimanfaatkan dalam bidang lainnya. Pemodelan fungsi logaritma juga dimanfaatkan dalam menentukan besarnya kekuatan suatu gempa. Dalam skala Richter, besarnya gempa bumi dengan intensitas I dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

dengan I_0 adalah intensitas dari suatu gempa yang hampir tidak terasa (tingkat nol). Untuk lebih memahami bagaimana pemodelan suatu fungsi logaritma dalam menentukan kekuatan suatu gempa, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.10

Skala Richter

Gempa bumi yang terjadi di Haiti pada tahun 2010 memiliki intensitas 10^7 dibandingkan gempa bumi tingkat nol. Berapa skala Richer kekuatan gempa tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Karena intensitas gempanya 10^7 kali daripada gempa tingkat nol, maka $I = 10^7 I_0$. Dengan demikian,

$R = \log \frac{I}{I_0}$ Rumus besar gempa bumi dalam skala Richter

$= \log \frac{10^7 I_0}{I_0}$ Substitusi I dengan I_0

$= \log 10^7$

$= 7$ Sifat dasar logaritma ${}^a\log a^x = x$

Jadi, gempa bumi di Haiti pada tahun 2010 tersebut memiliki kekuatan 7 skala Richter.

Gempa bumi yang mengakibatkan tsunami di Samudra Hindia pada tanggal 26 Desember 2004 memiliki intensitas $10^{9,3}$ kali dibandingkan gempa bumi tingkat nol. Berapa skala Richter besar gempa tersebut?

Fungsi logaritma dengan basis e (logaritma alami) yang telah kalian ketahui sebelumnya juga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan di sekitar kita, salah satunya permasalahan pengisian daya baterai. Jika C_0 adalah daya maksimum yang dapat disimpan oleh suatu baterai dan k adalah konstanta positif yang bergantung pada baterai tersebut dan pengisi dayanya, lamanya waktu (dalam menit) yang diperlukan untuk mengisi daya baterai tersebut dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

Gunakan rumus ini untuk menyelesaikan permasalahan dalam Contoh 5.11 berikut.

Contoh 5.11

Mengisi Daya Baterai

Tentukan waktu yang diperlukan untuk mengisi daya baterai yang dayanya kosong menjadi 90% penuh. Anggap $k = 0{,}02$.

Alternatif Penyelesaian

Karena baterai tersebut akan diisi dayanya sampai 90% penuh, maka $C = 90\%C_0 = 0{,}9C_0$. Dengan demikian,

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$ Rumus waktu pengisian daya baterai

$$= -\frac{1}{0{,}02}\ln\left(1 - \frac{0{,}9C_0}{C_0}\right)$$ Substitusi $C = 0{,}9C_0$ dan $k = 0{,}02$

$$= -50\ln(1 - 0{,}9)$$

$$= -50\ln 0{,}1$$

$$\approx 115{,}13$$ Hitung dengan kalkulator

Jadi, waktu pengisian daya tersebut ialah sekitar 115 menit.

Berapa menit waktu yang diperlukan untuk mengisi daya baterai yang sepenuhnya kosong agar baterai tersebut menjadi 80% penuh? Anggap k = 0,025.

Selain untuk pemodelan pertumbuhan, fungsi logaritma juga digunakan untuk pemodelan peluruhan/penurunan dengan formula

$$H(t) = ce^{kt}$$

dengan $H(t)$ nilai pada saat waktu t.

Untuk lebih memahami bagaimana pemodelan suatu fungsi logaritma terhadap penurunan suatu nilai, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.12

Harga Jual Mobil

Pada setiap saat, harga sebuah mobil setelah digunakan tidak sebanding dengan harga saat itu. Jika harga mobil baru adalah 200 juta rupiah dan setelah 5 tahun menjadi 100 juta rupiah, tentukan harga mobil setelah 10 tahun digunakan.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan bahwa $H(0)$=200 juta dan $H(5)$=100 juta. Akibatnya, diperoleh

$H(0) = 200$, maka $200 = ce^0 = c$.

$H(5) = 100$ maka $100 = 200e^{4k}$. Akibatnya, $e^{4k} = \frac{1}{2}$ dan $4k = \ln\frac{1}{2}$.

Dari hasil tersebut, diperoleh harga mobil setiap saat t adalah

$$H(t) = 200e^{(\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2})t} = 200e^{(-0,173t)}$$

Jadi, harga mobil setelah 10 tahun digunakan adalah $H(10) = 200e^{-0,173(10)} = 35,46,$ yaitu sekitar Rp35 juta.

Setelah berapa tahun penggunaan mobil tersebut tidak akan mempunyai nilai jual lagi?

Fungsi Logaritma

Kerjakan latihan berikut dengan benar

Pemahaman Konsep

1. Fungsi $f(x) = \ln x$ memiliki daerah asal . . . dan daerah hasil . . . .
2. Fungsi logaritma $f(x) = {}^5\log x$ memiliki basis . . . . Dengan demikian, $f(1)$ = . . . , $f(5)$ = . . . , dan $f(25)$ = ...
3. Sketsalah grafik fungsi $g(x) = \left({}^5\log x\right) + 1$. Tentukan daerah asal, daerah hasil, dan *asimto*t tegaknya.
4. Logaritma hasil bagi dari dua bilangan sama dengan . . . dari logaritma kedua bilangan tersebut. Oleh karena itu, ${}^5\log\left(\frac{2013}{3}\right) = ...$
5. *Benar atau Salah.* Jika ${}^b\log M < {}^b\log N$, maka $M < N$.

Penerapan Konsep

6. **Membandingkan Intensitas Gempa.** Tanggal 26 Desember 2004, terjadi gempa bumi di lepas pantai Aceh dengan kekuatan 9,3 skala Richter. Sekitar 13 tahun berikutnya, Tasikmalaya juga diguncang gempa bumi dengan kekuatan 7,3 skala Richter. Berapa kali lipat intensitas gempa bumi yang terjadi di Tasikmalaya dibandingkan dengan gempa yang terjadi di Aceh?
7. **PH Jus Jeruk.** Jika segelas jus jeruk mempunyai ion hidrogennya $10^{-3,15}$, tentukan nilai pH jus jeruk tersebut.
8. **Tekanan Atmosfer.** Karena pengaruh gravitasi, molekul udara lebih banyak berada di permukaan bumi daripada di tempat yang tinggi. Akibatnya, tekanan udara akan terus berkurang seiring makin tingginya suatu tempat. Hubungan antara tekanan udara P (dalam kPa) dan ketinggian h (dalam km) dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{h}{7}$$

Puncak Jayawijaya memiliki ketinggian 4.884 km di atas permukaan laut. Dengan rumus tersebut, prediksilah tekanan udara di daerah tersebut.

9. **Batas Aman Tekanan Atmosfer.** Menurut Harry George Armstrong, daerah yang cocok terhadap tubuh manusia adalah daerah dengan ketinggian maksimum 14,9 km di atas permukaan laut. Berapa tekanan atmosfer yang masih dapat diterima manusia?
10. **Perkembangbiakan Bakteri**. Suatu jenis bakteri membelah diri setiap 2 jam. Jika sebuah koloni bakteri tersebut awalnya terdiri atas 50 bakteri, waktu t (dalam jam) yang diperlukan agar banyaknya bakteri tersebut menjadi N dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$t = 2\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

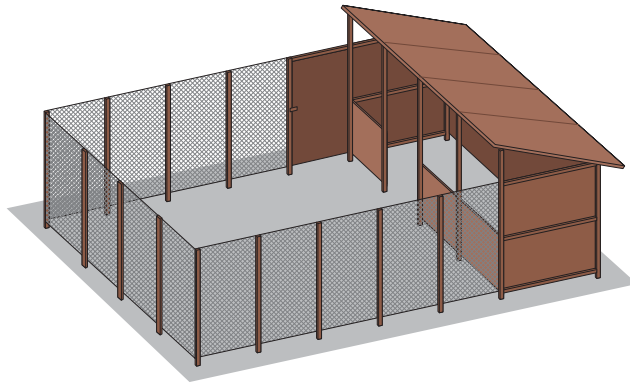
Tentukan waktu yang diperlukan agar dalam koloni tersebut terdapat satu juta bakteri.

C. Fungsi Aljabar

Kalian telah mempelajari fungsi linear dan fungsi kuadrat pada kelas X. Pada subbab, ini kita akan mempelajari fungsi aljabar lainnya, yaitu fungsi rasional dan fungsi akar.

1. Fungsi Rasional

Untuk memahami konsep fungsi rasional, perhatikan ilustrasi permasalahan berikut.

Petrus akan membuat kandang berbentuk persegi panjang seluas 425m^2 untuk ayam peliharaannya. Kandang tersebut akan dipagari dengan kawat harmonika dan akan pasang pintu dengan lebar 1 m seperti pada Gambar 5.27.

Gambar 5.27 Desain Kandang Ayam

Untuk memodelkan permasalahan tersebut, kalian dapat memperhatikan penjelasan berikut ini.

Kandang ayam yang akan dibuat berbentuk persegi panjang dengan luas 425m^2. Karena yang diketahui adalah luas kandang, langkah awal yang dilakukan adalah memodelkan permasalahan dengan menggunakan rumus luas persegi panjang untuk menentukan hubungan panjang (p) dan lebar (l) kandang.

$$L = p \times l \Rightarrow l = \frac{L}{p} = \frac{425}{p}$$

Pemasangan kawat harmonika merupakan permasalahan keliling sehingga keliling persegi panjang (k) dinyatakan sebagai fungsi terhadap variabel p (atau boleh juga l).

$$\begin{aligned} k = k(p) &= l + 2p - 1 \\ &= \frac{425}{p} + 2p - 1 \\ &= \frac{425 + 2p^2 - p}{p} \end{aligned}$$

Fungsi $k(p)$ tersebut merupakan fungsi rasional.

Fungsi rasional dapat kita ungkapkan sebagai hasil bagi dari dua fungsi polinomial. Secara umum, fungsi rasional dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 5.3

Fungsi Rasional

Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dan $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan $Q(x)\neq 0$, maka $f(x)$ merupakan fungsi rasional.

Catatan: Selain yang telah dideskripsikan pada Definisi 5.3, kita asumsikan bahwa $P(x)$ dan $Q(x)$ tidak memiliki faktor persekutuan.

Daerah asal fungsi rasional mencakup himpunan bilangan real yang tidak menyebabkan penyebut bernilai nol. Daerah asal sering disebut *domain*. Cara menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi rasional dapat kita lihat pada Contoh 5.13.

Contoh 5.13

Menentukan Daerah Asal dan Daerah Hasil Fungsi Rasional

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol. Untuk menentukan daerah asal fungsi f, hal pertama yang dilakukan adalah menemukan pembuat nol dari fungsi $x-1$.

$$x-1=0 \quad \text{pembuat nol } x-1$$
$$x=1 \quad \text{jumlahkan dengan 1}$$

Karena pembuat nol dari fungsi $x-1$ adalah 1, daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real kecuali 1 atau dapat ditulis $D_f=\{x \mid x\neq 1, x\in\mathbb{R}\}$.

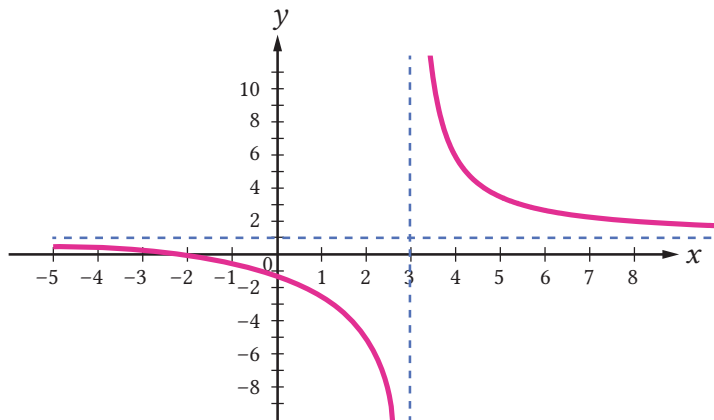
Menentukan daerah hasil fungsi f adalah sebagai berikut.

Pertama, kita tulis $y=\frac{1}{x-1}$, kemudian kita selesaikan untuk x.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x-1} && \text{persamaan fungsi rasional} \\
y(x-1) &= 1 && \text{kalikan dengan } x-1 \\
xy - y &= 1 && \text{sifat distributif} \\
xy &= y+1 && \text{jumlahkan dengan } y \\
x &= \frac{y+1}{y} && \text{bagi dengan } y
\end{aligned}
$$

$x = \frac{y+1}{y}$ tidak terdefinisi ketika $y = 0$. Maka, daerah hasil fungsi $f(x) = \frac{1}{x-1}$ adalah $R_f = \{y \mid y \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $g(x) = \frac{4x^2}{x^2-1}$.

Perhatikan grafik $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ berikut.

Gambar 5.28 Grafik Fungsi $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

- Dari Gambar 5.28, dapat kita lihat bahwa:
- grafik fungsi f memotong sumbu x di $(-3,0)$;
- grafik fungsi f memotong sumbu y di $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$;
- grafik fungsi f tidak melewati $x = 2$;
- jika nilai x mendekati 2 dari kiri ($x < 2$), diperoleh:

Tabel 5.2 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Mendekati 2 dari Kiri

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
$y = f(x)$	-49	-499	-4999	-49999

Dari Tabel 5.2 dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x mendekati 2 dari kiri, nilai y makin kecil atau mendekati negatif tak hingga.

- Jika nilai x mendekati 2 dari kanan ($x > 2$), diperoleh:

Tabel 5.3 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Mendekati 2 dari Kanan

x	2,1	2,01	2,001	2,0001
$y = f(x)$	51	501	5001	50001

Dari Tabel 5.3 dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x mendekati 2 dari kanan, nilai y makin besar atau mendekati positif tak hingga.

Grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis vertikal $x = 2$ sehingga garis $x = 2$ disebut sebagai *asimtot* vertikal.

- jika nilai x makin besar, diperoleh:

Tabel 5.4 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Semakin Besar

x	100	1000	10000	100000
$y = f(x)$	1,05	1,005	1,0005	1,00005

Dari Tabel 5.4 dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x makin besar, nilai y akan mendekati 1.

Jika nilai x makin kecil, diperoleh:

Tabel 5.5 Tabel Nilai Fungsi f jika Nilai x Semakin Kecil

x	-100	-1000	-10000	-100000
$y = f(x)$	0,95	0,995	0,9995	0,99995

Dari Tabel 5.5 dan grafik, terlihat bahwa ketika nilai x makin kecil, nilai y akan mendekati 1.

Grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis horizontal $y = 1$ sehingga garis $y = 1$ disebut *asimtot* horizontal.

Secara umum, definisi *asimtot* vertikal dapat kita tulis sebagai berikut.

Definisi 5.4

Asimtot Vertikal

Jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $x = a$ ketika nilai y mendekati positif tak hingga atau y mendekati negatif tak hingga, garis $x = a$ disebut *asimtot* vertikal.

Selain asimtot vertikal, ada jenis asimtot lain, yaitu asimtot horizontal. Secara umum, definisi *asimtot* horizontal adalah sebagai berikut.

Definisi 5.6

Asimtot Horizontal

Jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $y = b$ ketika nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, garis $y = b$ disebut *asimtot* horizontal.

Untuk memahami lebih baik lagi Definisi 5.4 dan 5.5, mari, kita perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.14

Menentukan *Asimtot* Vertikal dan *Asimtot* Horizontal

Tentukan asimtot vertikal dan *asimtot* horizontal dari setiap fungsi berikut.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ b. $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ c. $h(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x-1}$

Alternatif Penyelesaian

a. Penyebut $x^2 - 9$ nol ketika $x = \pm 3$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = -3$ dan $x = 3$ adalah asimtot vertikal fungsi f. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, maka nilai $f(x)$ mendekati nol sehingga *asimtot* horizontal fungsi f adalah sumbu x.
b. Penyebut $x - 3$ bernilai nol ketika $x = 3$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = 3$ adalah *asimtot* vertikal fungsi g. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati

negatif tak hingga, maka nilai $g(x)$ tidak mendekati nol. Maka, kita ubah fungsi tersebut dengan menggunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2 \\ x-3 & \overline{2x+1} \\ & \underline{2x-6}\;- \\ & \;\;\;\;\;\;\;7 \end{array}$$

Dari hasil pembagian bersusun tersebut, dapat diperoleh

$$g(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$$

Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $\frac{7}{x-3}$ mendekati nol. Maka, fungsi $g(x)$ akan mendekati 2 sehingga garis $y = 2$ merupakan *asimtot* horizontal fungsi g.

c. Penyebut $x-1$ bernilai nol ketika $x=1$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x=1$ adalah *asimtot* vertikal fungsi h. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $h(x)$ tidak mendekati nol. Maka, kita ubah fungsi tersebut dengan menggunakan pembagian bersusun diperoleh

$$h(x) = x + 6 + \frac{12}{x-1}$$

Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga , nilai $\frac{12}{x-1}$ mendekati nol. Maka, fungsi $g(x)$ akan mendekati $x+6$. Namun, garis $y = x + 6$ bukan garis horizontal. Jadi, fungsi h tidak memiliki *asimtot* horizontal.

Tentukan *asimtot* vertikal dan asimtot horizontal dari setiap fungsi berikut.

a. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 16}$ b. $g(x) = \frac{3x+7}{x+2}$ c. $h(x) = \frac{2x^2 + 11x + 15}{x+1}$

Beberapa fungsi rasional tidak memiliki asimtot vertikal ataupun *asimtot* horizontal, tetapi memiliki *asimtot* miring. *Asimtot* miring dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 5.6

***Asimtot* Miring**

Jika grafik fungsi *f* akan terus mendekat ke garis $y = mx + b$ ketika nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, maka garis $y = mx + b$ disebut sebagai *Asimtot* Miring**.**

Pada Contoh 5.14 bagian c), garis $y = x + 6$ bukan garis horizontal. Jadi, fungsi h tidak memiliki *asimtot* horizontal, tetapi garis $y = x + 6$ merupakan *asimtot* miring fungsi *h*.

Kalian sudah mempelajari tentang menentukan *asimtot*. *Asimtot* akan kita gunakan untuk menggambar grafik fungsi rasional.

Contoh 5.15

Menggambar Grafik Fungsi Rasional

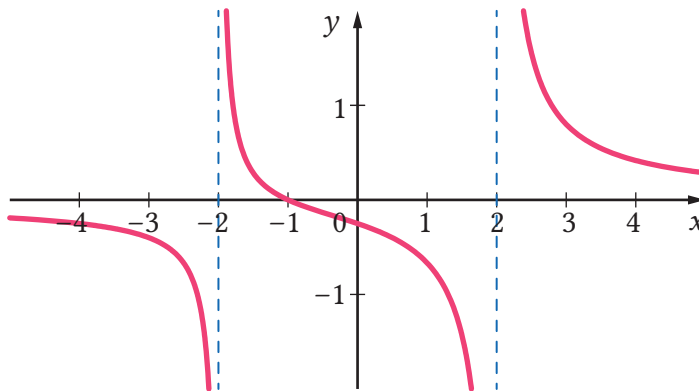
Gambarlah grafik fungsi rasional $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$.

Alternatif Penyelesaian

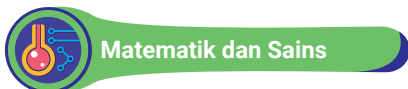
Untuk menggambar grafik *f*, dapat kita lakukan langkah-langkah berikut.

1. Titik potong fungsi dengan sumbu X dapat ditentukan dengan y = 0. Titik potong grafik fungsi *f* dengan sumbu X adalah (−1,0).
2. Titik potong fungsi dengan sumbu Y dapat ditentukan dengan x = 0. Titik potong grafik fungsi *f* dengan sumbu *y* adalah $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$.
3. Penyebut $x^2 - 4$ bernilai nol ketika $x = \pm 2$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = -2$ dan $x = 2$ adalah asimtot vertikal fungsi *f*. Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, maka nilai *f (x)* mendekati nol sehingga asimtot horizontal fungsi *f* adalah sumbu *x*. Kita gambar asimtot-asimtot ini dengan menggunakan garis putus-putus.
4. Untuk memudahkan menggambar, kita dapat menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan yang memenuhi $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$.

x	−3	−1,5	−1	0	1	2,5	3	4
$y = f(x)$	−0,4	0,29	0	−0,25	−0,67	1,56	0,8	0,42

5. Gambar grafik fungsi $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

Gambar 5.29 Grafik fungsi $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

Gambarlah grafik fungsi rasional $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$.

Fungsi rasional sering digunakan untuk memodelkan atau menyelesaikan permasalahan di sekitar kita.

Gaya

Dalam kehidupan sehari-hari, kalian pasti pernah mengalami atau menjumpai kejadian di mana ketika akan berpergian, tetapi kendaraan yang dikendarai tiba-tiba mogok. Tanpa berpikir panjang, hal yang dilakukan ialah mendorong kendaraan tersebut sampai ke bengkel. Pada saat mendorong mobil, ternyata ada gaya yang berlaku yaitu gaya dorong. Fungsi rasional dapat digunakan untuk memodelkan gaya. Dengan memodelkan fungsi gaya, kalian dapat mengetahui pengaruh besar gaya terhadap waktu.

Salah satu penerapan fungsi rasional dapat kalian ketahui dengan melakukan kegiatan eksplorasi berikut.

Penerapan Fungsi Rasional

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kalian diajak untuk memahami penerapan fungsi rasional pada gaya. Perhatikan permasalahan berikut.

Sebuah mobil mempunyai massa 1.200 kg. Mobil tersebut berpindah sejauh 30 m dari keadaan diam. Jika x adalah waktu (detik), untuk melihat pengaruh waktu terhadap besarnya gaya yang dilakukan terhadap mobil tersebut adalah sebagai berikut.

a). Tentukan fungsi f yang merupakan fungsi besar gaya.

Ingat rumus gaya:

$F = ma$, dengan $a = \frac{v}{t}$ dan $v = \frac{s}{t}$

Keterangan

F = gaya

a = percepatan

v = kecepatan

t = waktu

m = massa

s = jarak perpindahan

b). Tentukan daerah asal fungsi f!

c). Apakah fungsi f memiliki *asimtot* vertikal, horisontal, atau miring?

d). Cari pasangan berurutan yang merupakan titik bantu untuk menggambar grafik fungsi f!

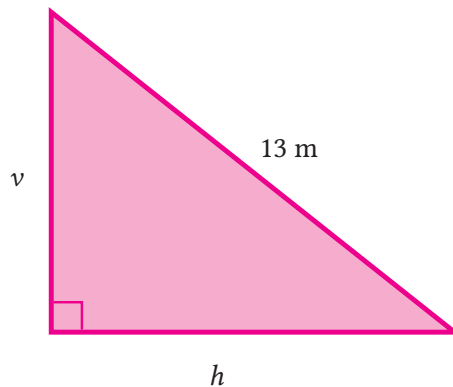
e). Gambarlah grafik fungsi f!

f). Amati grafik fungsi f yang kalian gambar, kemudian interpretasikan hasil pengamatan kalian.

Dari kegiatan eksplorasi tersebut, kalian dapat menginterpretasikan grafik fungsi besar gaya. Pada buku ini, selain pada bidang fisika, penerapan fungsi

rasional juga dapat kita jumpai pada bidang ekonomi, penerapan jarak, kecepatan dan waktu, serta pada bidang olahraga.

2. Fungsi Akar

Untuk memahami konsep fungsi akar, perhatikan gambar segitiga siku-siku berikut.

Gambar 5.30 Segitiga Siku-siku

Gambar tersebut adalah gambar segitiga siku-siku dengan sisi miringnya 13 m serta sisi penyikunya adalah v dan h. Apabila nilai h diketahui, nilai v dapat kita hitung sebagai berikut.

Jika $h=1$, maka $v=\sqrt{13^2-1^2}=\sqrt{169-1}=\sqrt{168}$

Jika $h=2$, maka $v=\sqrt{13^2-2^2}=\sqrt{169-4}=\sqrt{165}$

Jika $h=x$, maka $v=\sqrt{13^2-x^2}=\sqrt{169-x^2}$

Apabila v ditulis sebagai fungsi f terhadap x, diperoleh $f(x)=\sqrt{169-x^2}$. Fungsi f merupakan contoh fungsi akar.

Secara umum, fungsi akar dapat kita sajikan sebagai berikut.

Definisi 5.7

Fungsi akar

Jika $g(x)$ adalah suatu fungsi dan n adalah bilangan bulat lebih dari 1, maka $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ merupakan fungsi akar.

Catatan: pada pembahasan fungsi akar ini, ruang lingkup bilangan yang kita bahas adalah bilangan real.

Bagaimana menentukan daerah asal fungsi akar? Untuk menjawab pertanyaan ini, lakukan kegiatan eksplorasi berikut.

Menentukan Daerah Asal Fungsi Akar

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kalian diajak untuk menentukan daerah asal fungsi akar.

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x}$. Lakukan langkah-langkah berikut.

1. Tentukan pasangan berurutan $(x, f(x))$ yang memenuhi fungsi $f(x) = \sqrt{x}$

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = f(x)$	...	...	...	...	...	...

2. Dari pasangan berurutan di atas, gambarlah grafik fungsi *f*.
3. Dari gambar grafik, tentukan daerah asal fungsi *f*.

Lakukan langkah yang sama untuk menentukan daerah asal fungsi akar $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \sqrt[4]{x}$, dan $p(x) = \sqrt[5]{x}$.

Dari fungsi *f*, *g*, *h*, dan *p*, dugaan apa yang kalian peroleh? Jelaskan.

Secara umum, daerah asal fungsi akar adalah sebagai berikut.

Jika diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ dengan *n* adalah bilangan bulat lebih dari 1, daerah asal fungsi *f* dapat kita peroleh sebagai berikut.

- Jika nilai *n* genap (n = 2, 4, 6, ...), daerah asal fungsi akar *f* mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$ yang tidak menyebabkan $g(x)<0$.
- Jika nilai *n* ganjil (n = 1, 3, 5, ...), daerah asal fungsi akar *f* mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$.

Daerah hasil fungsi dapat kita lihat pada Contoh 5.16

Contoh 5.16

Menentukan Daerah Asal dan Daerah Hasil Fungsi Akar

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x - 2 < 0$. Untuk menentukan daerah asal fungsi f, hal pertama dilakukan ialah menemukan menyebabkan $x - 2 < 0$.

$x - 2 < 0$	syarat daerah asal fungsi akar
$x < 2$	jumlahkan dengan 2

Karena menyebabkan $x - 2 < 0$ adalah $x < 2$, daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real lebih dari sama dengan 2 atau dapat ditulis $D_f = \{x | x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$. Daerah hasil fungsi f adalah $R_f = \{y | y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi $g(x) = \sqrt{\dfrac{4}{x-2}}$

Untuk menggambar grafik fungsi akar, dapat kita lihat pada Contoh 5.17 berikut.

Contoh 5.17

Menggambar Grafik Fungsi Akar

Gambarlah grafik fungsi akar $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Alternatif Penyelesaian

Grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x-3}$ dapat kita gambar dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut.

a). Menentukan daerah asal fungsi *f*.

Daerah asal fungsi akar *f* mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x-3<0$. Untuk menentukan daerah asal fungsi f, hal pertama dilakukan ialah mencari nilai *x* yang menyebabkan $x-3<0$

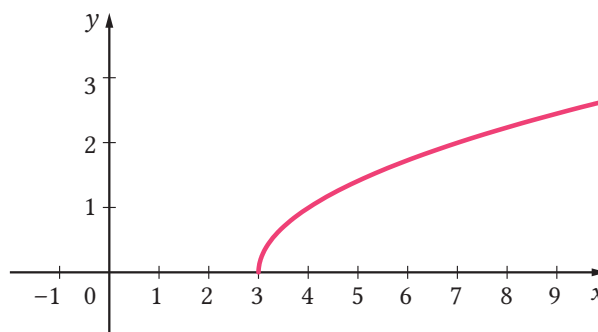
$x-3<0$ syarat daerah asal fungsi akar

$x<3$ jumlahkan dengan 3

Karena penyebab $x-3<0$ adalah $x < 3$, daerah asal fungsi rasional *f* adalah himpunan semua bilangan real lebih dari sama dengan 3 atau dapat ditulis $D_f=\{x|x\geq 3, x\in\mathbb{R}\}$.

b). Daerah asal fungsi f dapat memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(x, f(x))$ yang memenuhi $f(x)=\sqrt{x-3}$.

x	3	4	5	6	7	8	9
$y = f(x)$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45

c). Gambar grafik fungsi $f(x)=\sqrt{x-3}$

Gambar 5.31 Grafik fungsi $f(x)=\sqrt{x-3}$

Gambarlah grafik fungsi-fungsi akar berikut.

1). $g(x)=\sqrt{x}-5$

2). $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$

Fungsi akar sering digunakan untuk memodelkan atau menyelesaikan permasalahan di sekitar.

Tsunami

Pada tanggal 26 Desember 2004, terjadi bencana alam tsunami di Aceh. Berdasarkan Kontan.co.id, gelombang tsunami menyapu pesisir Aceh pascagempa dangkal berkekuatan M 9,3 yang terjadi pada dasar Samudra Hindia. Gempa terjadi pukul 07.59 WIB. Tidak lama setelah itu, muncul gelombang tsunami yang diperkirakan memiliki ketinggian 30 meter dengan kecepatan mencapai 100 meter per detik atau 360 kilometer per jam. Kecepatan tsunami bergantung pada kedalaman laut. Fungsi akar dapat digunakan untuk memodelkan kecepatan tsunami yang melintas di lautan.

Salah satu penerapan fungsi akar dapat kalian ketahui dengan melakukan kegiatan eksplorasi berikut.

Penerapan Fungsi Akar

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kalian diajak untuk memahami penerapan fungsi akar pada kecepatan gelombang tsunami. Perhatikan permasalahan berikut.

Kecepatan (m/s) tsunami yang melintas di lautan merupakan akar dari hasil kali antara antara percepatan gravitasi dan kedalaman laut (m). Percepatan gravitasi bumi adalah 9,8 m/s^2.

a). Buatlah fungsi untuk memodelkan kecepatan tsunami!
b). Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi kecepatan tsunami!
c). Gambarlah grafik fungsi tersebut!
d). Amati grafik fungsi yang kalian gambar, kemudian interpretasikan hasil pengamatan kalian.
e). Tentukan kecepatan tsunami jika kedalaman laut adalah 3.000 m!

Dari kegiatan eksplorasi tersebut kalian dapat menginterpretasikan grafik fungsi kecepatan tsunami. Pada buku ini, selain pada bidang fisika, penerapan fungsi akar digunakan untuk memperkirakan jarak sebuah benda ke horizon.

Fungsi Aljabar

Kerjakan latihan berikut dengan jelas dan benar.

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau Salah.* Fungsi $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$ merupakan fungsi rasional.

2. *Benar atau Salah.* Misalkan, $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ adalah fungsi rasional dengan derajat $q(x)$ minimal 1 serta $p(x)$ dan $q(x)$ tidak memiliki faktor persekutuan. Maka, *asimtot* vertikal grafik f bersesuaian dengan penyelesaian persamaan $q(x) = 0$.

3. *Benar atau Salah.* Fungsi $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x^2+1}}$ merupakan fungsi akar.

4. *Benar atau Salah.* Jika daerah asal fungsi akar adalah himpunan bilangan real, daerah hasilnya juga merupakan himpunan bilangan real.

Penerapan Konsep

5. Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi-fungsi berikut

   a). $f(x)=\frac{7+x}{15+x}$

   b). $g(x)=\sqrt[3]{x-2}$

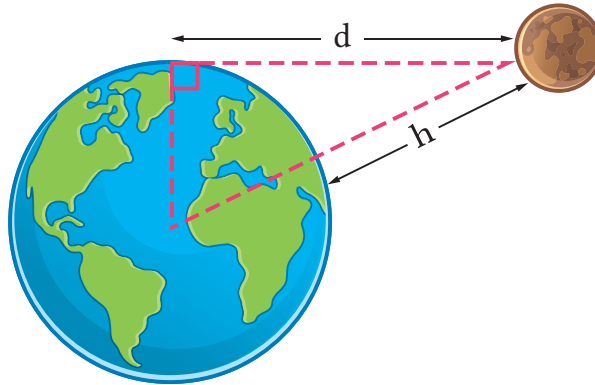
6. Tentukan asimtot miring dari fungsi $p(x)=\frac{x^5+x^4+x^2+1}{x^4+3}$.

7. **Ekonomi.** Misalkan, sebuah perusahaan kue dalam memproduksi kue brownis membutuhkan biaya bulanan Rp7.000.000,00 dan Rp40.000,00 untuk memproduksi tiap loyang kue brownis tersebut. Jika rumus fungsi biaya adalah $B(x)$ = biaya tetap + cx, dengan c adalah biaya produksi tiap kue dan x adalah banyaknya produksi kue brownis (tiap loyang),

   a). Tentukan model matematika dari fungsi biaya untuk memproduksi x loyang kue brownis.

b). Modelkan fungsi biaya rata-rata B untuk memproduksi x loyang kue brownis.

c). Gambarlah grafik fungsi biaya rata-rata B.

8. Perhatikan gambar berikut.

Gambar 5.32 Jarak Obyek dari Bumi

9. Untuk ketinggian yang relatif kecil di atas bumi, fungsi akar sederhana dapat digunakan untuk memperkirakan jarak sebuah benda mendekati horizon.

   a). Jika jari-jari bumi diasumsikan 6.371 *km*, modelkan fungsi jarak d (dalam *km*) ke horizon untuk sebuah benda yang berada pada ketinggian h km di atas permukaan bumi.

   b). Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi d !

   c). Gambarlah grafik fungsi d !

   d). Bagaimana kalian menggunakan fungsi d untuk menentukan jarak benda ke horizon pada benda yang berada pada 1.000 km di atas permukaan bumi?

Fungsi Non-Aljabar

Pada subbab ini, kalian akan mempelajari fungsi non-aljabar. Secara sederhana, fungsi ini dapat dipahami sebagai sebuah fungsi yang tidak dapat dinyatakan dengan operasi aljabar yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Beberapa fungsi yang termasuk dalam fungsi non-aljabar yang akan dipelajari pada subbab ini termasuk fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi *piecewise*.

1. Pemodelan Fungsi Eksponensial

Pada subbab ini, kita akan fokus pada pemodelan yang memanfaatkan fungsi eksponensial. Sebelumnya, kita simak definisi dari fungsi eksponensial. Setelah itu, kita akan mengikuti beberapa contoh beserta alternatif penyelesaiannya sebalum mencoba beberapa persoalan yang serupa.

Definisi 5.8

Definisi Fungsi Eksponensial

Untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$, fungsi eksponensial didefiniskan sebagai fungsi yang memenuhi bentuk berikut:

$$f(x) = ab^x$$

yang mana $a \neq 0$, $b > 0$, dan $b \neq 1$.

Untuk lebih memahami penerapan fungsi eksponensial, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 5.18

Penerapan dalam Bidang Biologi

Misalkan, sebuah bakteri berkembang biak dengan mengikuti pola eksponensial $J_0(2)^t$ yang mana J_0 menyatakan jumlah bakteri awal dan t menyatakan menit. Misalkan, pada sebuah permukaan, terdapat bakteri tersebut sebanyak 100. Tentukan banyak bakteri yang ada pada permukaan tersebut setelah 10 menit.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan insformasi pada soal, kita peroleh J_0=100 dan t=10. Akibatnya, banyak bakteri pada menit ke 10 adalah $f(10)=100(2)^{10}=1000(1.024)=102.400$.

Tentukan banyak bakteri pada menit ke-5 yang ada pada suatu permukaan yang bermula ada sebanyak 50 jika perkembangbiakannya ditentukan oleh fungsi eksponensial $f(t)=J_0(3)$ dengan t dalam menit.

Aktivitas berikut merupakan alternatif kegiatan yang dapat dikerjakan jika sarana dan prasarana internet maupun alat sudah tersedia.

Aktivitas Interaktif

Tabel berikut menunjukkan populasi di Amerika Serikat dalam juta dari tahun 1900 sampai 2010. Gunakan kalkulator grafik atau aplikasi yang dapat mengaplikasikan regresi eksponensial untuk memodelkan populasi Amerika Serikat. Salah satu aplikasi yang dapat digunakan adalah Desmos. Gunakan model tersebut untuk memperkirakan populasi pada tahun 1925 dan 2020.

Tahun	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Populasi	76	92	106	123	131	150	179	203	227

2. Pemodelan Fungsi Nilai Mutlak

Dalam bagian ini, kita akan mempelajari pemodelan matematika yang memanfaatkan konsep nilai mutlak. Paling tidak, ada beberapa persoalan yang terkait dengan nilai mutlak termasuk yang berkaitan dengan jarak dan penerapan di bidang fisika.

Definisi 5.9

Bentuk-bentuk Fungsi Nilai Mutlak

Untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$, termasuk fungsi nilai mutlak adalah fungsi yang didefinisikan dengan memenuhi bentuk berikut

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

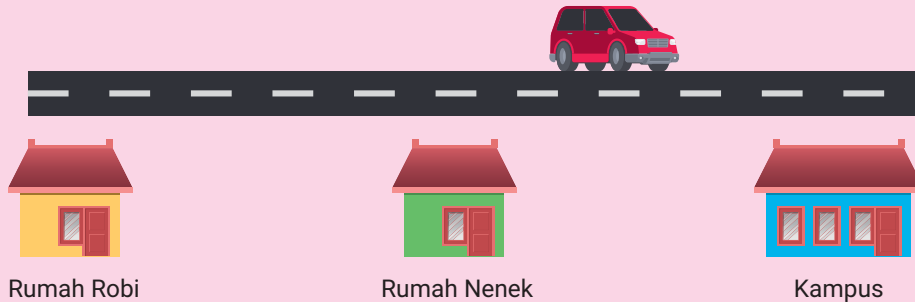
atau

$$f(x) = a|x-h|+k \ .$$

Setelah mencermati beberapa bentuk fungsi nilai mutlak, kita akan mempelajari bagaimana penerapan dari konsep fungsi nilai mutklak dalam beberapa fenomena.

Contoh 5.19

Penerapan Terkait dengan Jarak

Robi mengendarai mobil dari rumahnya yang berada di samping jalan raya (lihat Gambar 5.33). Dia mengendarai mobilnya menuju ke kampus dan melewati rumah neneknya. Jarak rumahnya ke rumah neneknya adalah 30 km, jarak dari kampus ke rumah neneknya adalah 30 km.

Gambar 5.33 Ilustrasi Perjalanan Robi

a). Buatlah tabel untuk menunjukkan seberapa jauh Robi dari rumah dan seberapa jauh Robi dari rumah nenek dimulai dari awal perjalanan dari rumah sampai tiba di kampus!

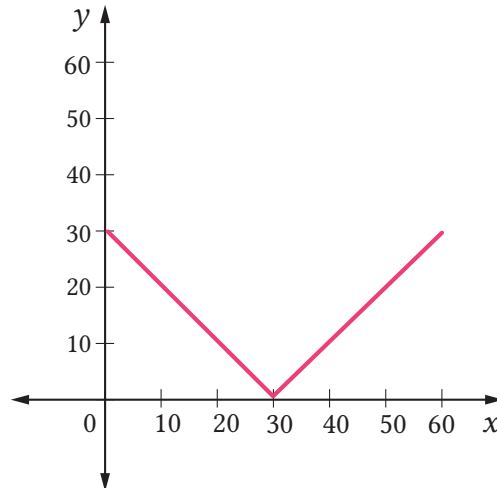
b). Gambarkan grafik yang merepresentasikan hubungan antara jarak dari Robi ke rumah dan jarak dari Robi ke rumah nenek!

c). Temukan fungsi yang menyatakan jarak Robi rumah dalam jarak Robi ke rumah nenek!

Alternatif Penyelesaian

a). Robi menjauh dari rumah selama perjalanan. Di sisi lain, dia mendekat ke rumah nenek dan kemudia menjauh.

Jarak Robi ke rumah	0	10	20	30	40	50	60
Jarak Robi ke rumah nenek	30	20	10	0	10	20	30

b). Misalkan, jarak Robi ke rumahnya adalah x dan jarak Robi ke rumah nenek adalah y. Grafik dari hubungan keduanya dapat diilustrasikan sebagai berikut.

Gambar 5.34 Grafik Perjalanan Robi

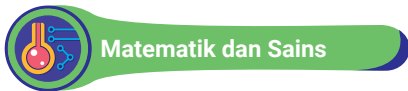
c). Fungsi yang dapat merepresentasikan hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai $f(x) = |x - 30|$. Namun, perlu diperhatikan bahwa nilai hanya dibatasi untuk $0 \leq x \leq 60$.

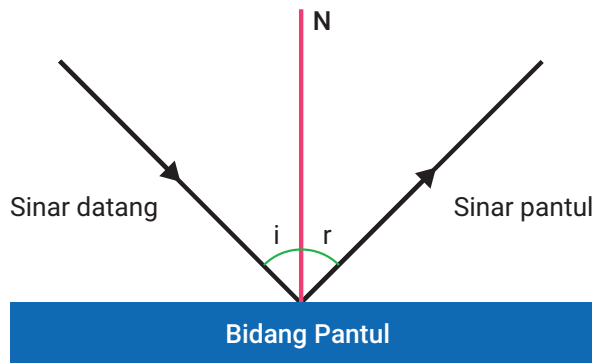
Rudi berjalan dari rumahnya yang berada di samping jalan raya, serupa dengan ilustrasi Gambar 5.33. Dia berjalan menyusuri trotoar di samping jalan raya tersebut untuk menuju ke salah satu pusat perbelanjaan. Jarak rumahnya ke pusat perbelanjaan adalah 50 km. Di tengah-tengah antara pusat perbelanjaan dan rumah Rudi, terdapat warung nasi padang kesukaannya.

a). Buatlah tabel untuk menunjukkan jarak Rudi dari rumah dan seberapa jauh dia dari warung nasi padang dimulai dari awal perjalanan dari rumah sampai tiba di pusat perbelanjaan!

b). Gambarlah grafik yang merepresentasikan hubungan antara jarak Rudi ke rumah dan jarak Rudi ke warung nasi padang!

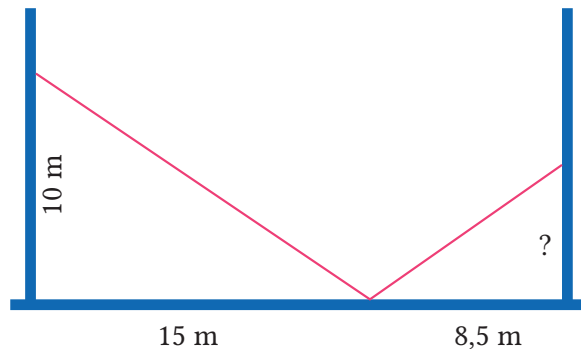
c). Temukan fungsi yang menyatakan jarak Robi ke warung nasi padang dalam jarak Rudi ke rumah!

Sebelum masuk ke contoh berikutnya, kita akan menyimak penjelasan tentang suatu konsep fisika pada fitur Matematika dan Sains berikut.

Hukum Pemantulan Cahaya

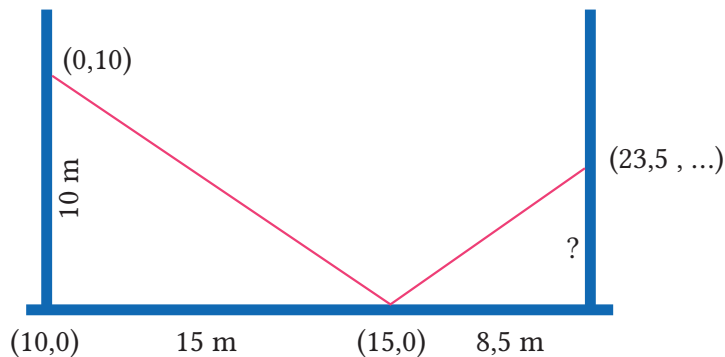
Dalam bidang Fisika, kita mengenal istilah hukum pemantulan cahaya. Pada bagian ini, akan dijelaskan apa maksud hukum tersebut. Misal, kita ilustrasikan peristiwa pemantulan cahaya seperti pada Gambar 5.35. Terdapat tiga buah garis. Garis yang merepresntasikan sinar datang, sinar pantul, dan garis normal. Garis normal adalah garis yang tegak lurus dengan bidang pantul. Secara singkat, hukum ini berbunyi bahwa sudut pantul cahaya ukurannya sama besar dengan sudut datang cahaya.

Gambar 5.35 Ilustrasi Pemantulan Cahaya

Contoh 5.20

Pantulan cahaya

Pada sebuah pameran di museum, terdapat dekorasi cahaya yang melibatkan beberapa lampu. Satu buah lampu ditempelkan pada dinding berjarak 10 m dari lantai. Cahaya lampu ini diarahkan ke sebuah cermin yang berjarak 15 m dari dinding tersebut dan memantulkan cahaya ke dinding lain yang berjarak 8.5 m dari cermin tersebut. Untuk lebih jelas, silakan melihat pada Gambar 5.36. Pada ketinggian berapa pantulan cahaya mencapai tembok di hadapan tembok yang pertama?

Gambar 5.36 Ilustrasi Pemantulan Cahaya di Museum

Alternatif Penyelesaian

Kita akan menggunakan fungsi nilai mutlak dalam bentuk $f(x) = a|x - h| + k$ dengan (h,k) adalah titik puncak dari grafik fungsi nilai mutlaknya. Misalkan, kita menelaah masalah ini dalam koordinat Kartesius seperti pada Gambar 5.37.

Gambar 5.37 Ilustrasi Pemantulan Cahaya dalam Koordinat

Karena titik puncaknya adalah (0,15), dengan subtitusi, kita peroleh $f(x) = a|x - 15| + 0$. Selanjutnya, karena (0,10) berada pada garis, maka kita peroleh $10 = a|0 - 15|$. Akibatnya, nilai adalah $\frac{2}{3}$. Oleh karena itu, persamaan nilai mutlak yang diinginkan adalah $f(x) = \frac{2}{3}|x - 15|$.

Berdasarkan persamaan ini, kita dapat menentukan pada ketinggian berapa sinar lampu mencapai tembok dengan cara mensubstitusikan x=2,35 ke dalam fungsi. Akibatnya, diperoleh $f(23,5) = \frac{2}{3}|23,5 - 15| = \frac{17}{3}$.

Samosir sedang bermain senter. Dia berdiri di hadapan tembok dan cermin berada sejajar di antara dia dan tembok. Dia mengarahkan sinar senter ke cermin tersebut dan pantulan sinarnya mengenai tembok. Diketahui, Samosir memegang senter pada ketinggian 1 m, jarak antara dia dan cermin adalah 5 m, dan jarak dia ke tembok adalah 15 meter. Tentukan berapa tinggi pantulan sinar di tembok.

3. Pemodelan Fungsi Tangga

Pada bagian ini, kita akan mempelajari penerapan fungsi tangga terkait beberapa permasalahan. Beberapa contoh permasalahan akan dibahas di sini.

Definisi 5.10

Pengertian Fungsi Tangga

Fungsi tangga adalah fungsi yang bernilai konstan pada interval-interval dimana ia didefinisikan.

Catatan: Terdapat variasi definisi dari fungsi tangga. Ada yang mensyaratkan banyak intervalnya harus berhingga. Ada pula yang mensyaratkan intervalnya harus seragam sedemikian rupa sehingga grafiknya tampak seperti tangga sungguhan. Pada buku ini, kita menggunakan definisi yang lebih umum agar kalian dapat mempelajari banyak kasus khusus dari fungsi ini.

Contoh dari fungsi tangga yang memenuhi definisi tersebut adalah fungsi atap, yang dilambangkan dengan $f(x)=[x]$ dan bermakna bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x. Contoh lain ialah fungsi lantai, yang dilambangkan dengan $f(x)=[x]$ dan bermakna bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Contoh fungsi lain ialah fungsi pembulatan yang dilambangkan dengan $f(x)=[x]$ dan bermakna bilangan bulat terdekat ke x. Selanjutnya, kita akan mempelajari pemodelan dengan menggunakan fungsi ini.

Contoh 5.21

Penerapan dalam Biaya Telepon

Budi ingin menelepon kakaknya yang sedang berada di luar kota karena kangen dan sedang momen hari raya. Namun, dia belum mengisi pulsa. Berdasarkan info di internet, biaya yang dibutuhkan dapat dirinci sebagai berikut. Untuk setiap menit, dia harus membayar sebesar Rp250,00. Skema biaya pulsa dari penyedia jasa telepon tersebut adalah sebagai berikut. Biaya dihitung dengan membulatkan ke menit atas. Misalkan, Budi menelepon selama 1,3 menit. Maka, dia harus membayar untuk 2 menit, yakni 500 rupiah.

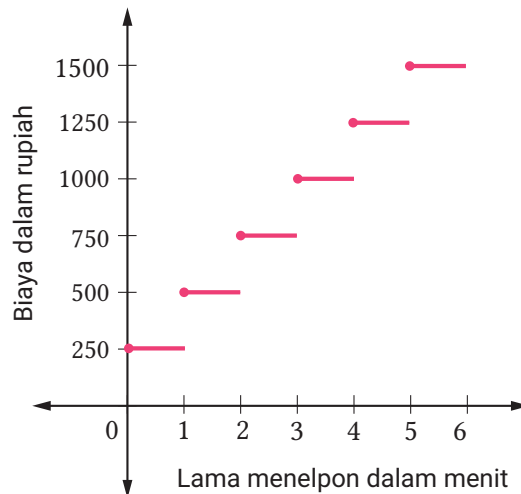
a). Buat tabel yang menjelaskan hubungan antara lama menelepon dalam menit dan total biaya yang dibutuhkan.
b). Gambarkan grafiknya dalam bidang Kartesius.
c). Tuliskan fungsi yang menyatakan total biaya yang dibutuhkan dalam lama menelepon.
d). Jika ingin menelepon selama tiga jam, apakah pulsa sebanyak Rp25.000,00 cukup?

Alternatif Penyelesaian

a). Berdasarkan informasi pada soal, kita dapat membuat tabel sederhana untuk menit dan besar biaya untuk menelepon sebagai berikut.

Tabel 5.6 Biaya Menelpon dalam Menit

Menit	0	1	2	3	4	5	6	7
Biaya	0	250	500	750	1000	1250	1500	1750

b). Berdasarkan info di soal, karena skema biaya menelepon yang ada, yakni dengan membulatkan biaya ke bilangan bulat atas, grafik dari permasalahan tersebut adalah sebagai berikut.

Gambar 5.38 Grafik Biaya Menelpon

c). Fungsi yang dapat merepresentasikan fenomena di atas adalah fungsi tangga yang dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$f(x) = 250k, k-1 < x \leq k, k = 1,2,3,\ldots$$

Maksud notasi tersebut adalah sebagai berikut. Misalnya, kita memiliki x=2,7. Karena 2<2,7≤3, maka f(2,7)=250×3=750. Notasi lain dari fungsi ini dapat dinyatakan dengan bantuan fungsi ceiling sebagai berikut:

$$f(x)=250\times[x].$$

d). Tiga jam dapat dinyatakan sebagai 180 menit. Artinya, biaya yang dibutuhkan oleh Budi adalah 150×250=45.000. Karena Budi hanya memiliki uang sebesar Rp25.000,00, uangnya belum cukup untuk menelepon selama tiga jam.

Sebuah tempat penyewaan *playstation* menerapkan aturan sebagai berikut. Untuk satu jam pertama, dikenakan biaya sebesar 20 ribu. Jika melebihi satu jam, sampai 2 jam, penyewa membayar 40 ribu. Jika melebihi dua jam sampai batas tiga jam, penyewa diharuskan membayar 60 ribu. Aturan berlaku juga untuk jam-jam berikutnya.

Buatlah tabel, grafik, dan fungsi terkait permasalahan tersebut seperti pada contoh sebelumnya. Tentukan juga berapa jam maksimal Andi dapat menyewa *playstation* di tempat tersebut jika dia memiliki uang 125 ribu rupiah.

4. Pemodelan Fungsi *Piecewise*

Pada bagian ini, kita akan belajar tentang pemodelan dengan menggunakan fungsi *piecewise* atau yang kadang disebut sepotong-sepotong. Simak definisinya sebagai berikut.

Definisi 5.11

Pengertian Fungsi *Piecewise*

Fungsi *piecewise* adalah fungsi yang didefinisikan dengan beberapa formula pada beberapa daerah asal.

Fungsi nilai mutlak dan fungsi tangga termasuk fungsi *piecewise.* Contoh sederhana lain adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, x \leq 0 \\ e^x, 0 \leq x < \pi \\ [x], x \geq \pi \end{cases}.$$

Selanjutnya, perhatikan contoh berikut dan kerjakan aktivitas Mari, Mencoba untuk memahami pemodelan dengan menggunakan fungsi *piecewise.*

Contoh 5.22

Penerapan Fungsi *Piecewise*

Mangiring mengikuti sebuah kompetisi yang melibatkan tiga aktivitas: kayak, bersepeda, dan berlari. Untuk kayak, dia menghabiskan 2 jam untuk menempuh jarak sepanjang 20 km di sebuah danau. Selanjutnya, dia bersepeda sejauh 50 km, selama 2 jam. Terakhir, Mangiring berlari selama 1 jam sejauh 10 km.

a). Buat tabel yang menyatakan hubungan antara waktu tempuh, total jarak yang ditempuh, dan kecepatan untuk tiga jenis aktivitas.

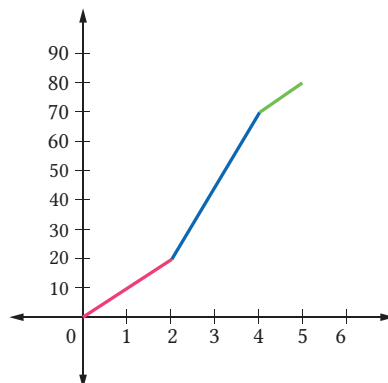
b). Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara waktu terhitung dari awal lomba dan total jarak yang ditempuh pada bidang Kartesius.

c). Tuliskan fungsi total jarak yang ditempuh terhadap waktu tempuh.

Alternatif Penyelesaian

a). Berdasarkan informasi di soal, kita dapat menyusun tabel berikut.

Kegiatan	Waktu tempuh	Jarak tempuh	Kecepatan
Kayak	2 jam	20 km	10 km/jam
Sepeda	2 jam	50 km	25 km/jam
Lari	1 jam	10 km	10 km/jam

b). Berdasarkan tabel yang telah dibuat, kita dapat menggambar grafik seperti berikut dengan memisalkan sumbu X sebagai representasi waktu dalam jam dan sumbu Y untuk jarak tempuh dalam km.

Gambar 5.39 Grafik Perjalanan Mangiring

c). Untuk memformulasikan fungsi *piecewise*, kita tinjau satu per satu interval untuk tiap cabang lomba yang diikuti. Untuk 2 jam pertama, kecepatan Mangiring saat menggunakan kayak adalah 10 km/jam dengan titik awal (0,0). Akibatnya, kita bisa tulis $f(x)=10x, 0 \leq x \leq 2$. Selanjutnya, melewati dua jam sampai jam keempat, kecepatan Mangiring adalah 25 km/jam dengan titik awal (2,20). Akibatnya, kita bisa menuliskan $f(x)=25x-30$, $2<x\leq 4$. Yang terakhir, Mangiring berlari dengan kecepatan 10 km/jam dan titik awal (4,70). Karena itu, kita dapat memperoleh $f(x)=10x+30$, $4<x\leq 5$. Dengan menggabungkan ketiga kasus tersebut, kita dapat menuliskan fungsi piecewise-nya sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} 10x, 0 \leq x < 2 \\ 25x - 30, 2 < x \leq 4 \\ 10x + 30, 4 < x \leq 5 \end{cases}.$$

Surya mengikuti sebuah kompetisi yang melibatkan tiga aktivitas: bersepeda, berenang, dan berlari. Surya menghabiskan 3 jam untuk menempuh jarak sepanjang 50 km di lintasan sepeda. Selanjutnya, dia berenang sejauh 1 km selama 15 menit. Terakhir, Surya berlari selama 2 jam sejauh 30 km.

a). Buat tabel yang menyatakan hubungan antara waktu tempuh, total jarak yang ditempuh, dan kecepatan untuk tiga jenis aktivitas.

b). Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara waktu terhitung dari start lomba dan total jarak yang ditempuh pada bidang Kartesius.

c). Tuliskan fungsi total jarak yang ditempuh terhadap waktu tempuh.

Pemahaman Konsep

1. *Benar atau salah.* Fungsi konstan $f(x)=1$ merupakan fungsi eksponensial.
2. *Benar atau salah.* Ada fungsi *piecewise* yang merupakan gabungan dari fungsi tangga dan fungsi eksponensial.

Penerapan

3. Sebuah koloni bakteri bermula dengan 500 bakteri. Bakteri jenis ini mampu membelah diri menjadi dua setiap setengah jam sekali.
   a). Berapa banyak bakteri setelah tiga jam?
   b). Berapa banyak bakteri setelah t jam?
   c). Berapa banyak bakteri setelah 40 menit?
   d). Gambarkan fungsi populasi dari fenomena tersebut dan estimasikan kapan populasinya mencapai 100.000.

4. Made berjalan dari rumahnya yang berada di samping jalan raya, serupa dengan Gambar 5.30. Dia bersepeda menyusuri trotoar di samping jalan raya tersebut menuju ke sebuah taman bermain. Jarak rumahnya ke taman bermain adalah 10 km. Di tengah-tengah antara pusat perbelanjaan dan rumah Made, terdapat Restoran Singkawang.
   a). Buatlah tabel untuk menunjukkan jarak Made dari rumah dan seberapa jauh dia dari Restoran Singkawang dimulai dari awal perjalanan dari rumah sampai tiba di taman bermain.
   b). Gambarlah grafik yang merepresentasikan hubungan antara jarak Made ke rumah dan jarak Made ke Restoran Singkawang.
   c). Temukan fungsi yang menyatakan jarak Made ke Restoran Singkawang dalam jarak Made ke rumah.

5. Di sebuah warnet, pengaturan biaya pembayaran sewa internet dihitung dengan cara sebagai berikut. Untuk 10 menit pertama, dikenakan biaya sebesar Rp2.000,00. Artinya, jika pengguna warnet mengakses komputer dan internet selama kurang dari atau sama dengan 10 menit, dia harus membayar sebesar dua ribu rupiah. Begitu juga untuk setiap 10 menit selanjutnya, dikenakan biaya sebesar Rp2.000,00.
   a). Buat tabel yang menyatakan hubungan antara lama menggunakan fasilitas warnet dan biaya pakainya!
   b). Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara lama menggunakan fasilitas warnet dan biaya pakainya!
   c). Tuliskan fungsi biaya pakai fasilitas warnet dalam satuan waktu!
   d). Apakah dengan memiliki uang 300 ribu, kita bisa menghabiskan waktu selama 5 jam di warnet?

6. Kevin mengikuti sebuah kompetisi yang melibatkan empat aktivitas: kayak, bersepeda, berenang, dan berlari. Dia menempuh jarak sejauh 30 km dengan kayak selama 3 jam. Selanjutnya, dia menghabiskan 2 jam untuk menempuh jarak sepanjang 40 km di lintasan sepeda. Kemudian, dia berenang sejauh 1 km selama 20 menit. Terakhir, Kevin berlari selama 2.5 jam sejauh 25 km.
   a). Buat tabel yang menyatakan hubungan antara waktu tempuh, total jarak yang ditempuh, dan kecepatan untuk empat jenis aktivitas!
   b). Gambarkan grafik yang menjelaskan hubungan antara waktu terhitung dari start lomba dan total jarak yang ditempuh pada bidang Kartesius!
   c). Tuliskan fungsi total jarak yang ditempuh terhadap waktu tempuh!

Rangkuman

1. Misalkan, θ adalah sudut dalam posisi baku dan $P(x, y)$ adalah titik yang berada pada sisi akhir sudut tersebut. Jika r adalah jarak antara titik asal ke titik P, maka fungsi-fungsi trigonometri sin, cos, dan tan didefinisikan sebagai berikut.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

2. Misalkan, $\bar{\theta}$ adalah sudut lancip, yaitu $0° < \bar{\theta} < 90°$. Maka, nilai fungsi-fungsi trigonometri di kuadran 2 sampai 4 dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut.

   Kuadran II

   $$\sin(180° - \bar{\theta}) = \sin\bar{\theta}$$

   $$\cos(180° - \bar{\theta}) = -\cos\bar{\theta}$$

   $$\tan(180° - \bar{\theta}) = -\tan\bar{\theta}$$

   Kuadran III

   $$\sin(180° + \bar{\theta}) = -\sin\bar{\theta}$$

   $$\cos(180° + \bar{\theta}) = -\cos\bar{\theta}$$

   $$\tan(180° + \bar{\theta}) = \tan\bar{\theta}$$

Kuadran IV

$$\sin\left(360^\circ - \overline{\theta}\right) = \sin\left(-\overline{\theta}\right) = -\sin\overline{\theta}$$

$$\cos\left(360^\circ - \overline{\theta}\right) = \cos\left(-\overline{\theta}\right) = \cos\overline{\theta}$$

$$\tan\left(360^\circ - \overline{\theta}\right) = \tan\left(-\overline{\theta}\right) = -\tan\overline{\theta}$$

3. Jika $0^\circ < \theta < 360^\circ$ dan k adalah sebarang bilangan bulat, nilai fungsi-fungsi trigonometri dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$\sin\left(k \cdot 360^\circ + \theta\right) = \sin\theta$$

$$\cos\left(k \cdot 360^\circ + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\tan\left(k \cdot 180^\circ + \theta\right) = \tan\theta$$

4. Berikut ini adalah identitas-identitas trigonometri dasar.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin\left(-\theta\right) = -\sin\theta$$

$$\cos\left(-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\tan\left(-\theta\right) = -\tan\theta$$

5. Fungsi-fungsi $y = a \sin bx$ dan $y = a \cos bx$ memiliki amplitudo | a | dan periode $\frac{360^\circ}{|b|}$ atau $\frac{2\pi}{|b|}$, sedangkan fungsi $y = a \tan bx$ amplitudonya tidak ada dan periodenya $\frac{180^\circ}{|b|}$ atau $\frac{\pi}{|b|}$.

6. Fungsi logaritma berbasis a didefinisikan sebagai $y = {}^{a}\log x$ jika dan hanya jika $a^y = x$, dengan a adalah bilangan positif dan $a \neq 1$.
7. Karakteristik fungsi logaritma dalam bentuk $f(x) = {}^{a}\log x$ adalah sebagai berikut.
   a). Daerah asal f adalah himpunan bilangan real positif, daerah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real.

b). Grafik f memotong sumbu $-X$ di (1, 0), tetapi tidak memotong sumbu $-Y$.

c). Jika basis $a > 1$, maka f merupakan fungsi naik. Sebaliknya, jika basis $0 < a < 1$, maka f merupakan fungsi turun.

d). Grafik f mendekati sumbu $-Y$, tetapi tidak pernah memotongnya sehingga sumbu $-Y$ merupakan asimtot tegak.

8. Berikut ini adalah sifat-sifat lain dari fungsi logaritma. Misalkan, a dan b adalah bilangan positif dengan $a, b \neq 1$, didapat identitas fungsi logaritma sebagai berikut.
   - ${}^{b}\log(MN) = {}^{b}\log M + {}^{b}\log N$
   - ${}^{b}\log\left(\frac{M}{N}\right) = {}^{b}\log M - {}^{b}\log N$
   - ${}^{b}\log(M^{p}) = p\,{}^{b}\log M$
   - ${}^{b}\log M = \frac{{}^{a}\log M}{{}^{a}\log b}$
   - Jika ${}^{b}\log M = {}^{b}\log N$, maka $M = N$.
   - Jika $b > 1$ dan ${}^{b}\log M < {}^{b}\log N$ maka $M < N$.
   - Jika $0 < b < 1$ dan ${}^{b}\log M < {}^{b}\log N$ maka $M > N$.
9. Jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi polinomial dan $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan $Q(x) \neq 0$, maka $f(x)$ merupakan fungsi rasional. $P(x)$ dan $Q(x)$ tidak memiliki faktor persekutuan.
10. Daerah asal fungsi rasional mencakup himpunan bilangan real yang tidak menyebabkan penyebut bernilai nol.
11. Jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $x = a$ ketika nilai y mendekati positif tak hingga atau y mendekati negatif tak hingga, garis $x = a$ disebut sebagai *asimtot vertikal.*
12. Jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $y = b$ ketika nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, garis $y = b$ disebut sebagai *asimtot horizontal.*

13. Jika grafik fungsi *f* akan terus mendekat ke garis $y = mx + b$ ketika nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, garis $y = mx + b$ disebut sebagai a*Asimtot miring*.
14. Jika *g(x)* adalah suatu fungsi dan *n* adalah bilangan bulat lebih dari 1, maka $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ merupakan fungsi akar.
15. Jika diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ dengan *n* adalah bilangan bulat lebih dari 1, daerah asal fungsi *f* dapat kita peroleh sebagai berikut.
    - Jika nilai *n* genap (n = 2, 4, 6, ...), daerah asal fungsi akar *f* mencakup semua nilai pada daerah asal *g(x)* yang tidak menyebabkan $g(x) < 0$.
    - Jika nilai *n* ganjil (n = 1, 3, 5, ...), daerah asal fungsi akar *f* mencakup semua nilai pada daerah asal *g(x)*.
16. Pemodelan fungsi eksponensial dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan terkait, di antaranya dengan Biologi termasuk peluruhan dan juga perkembangbiakan bakteri.
17. Pemodelan dengan menggunakan fungsi nilai mutlak dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait, di antaranya dengan jarak dan pemantulan cahaya.
18. Pemodelan dengan fungsi tangga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah, di antaranya terkait dengan biaya menelepon atau sewa jasa internet.
19. Pemodelan dengan menggunakan fungsi *piecewise* dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan, di antaranya terkait dengan biaya kirim barang dan kecepatan.

Uji Pemahaman

Benar atau Salah. Tentukan apakah pernyataan nomor 1 – 5 berikut benar atau salah.

1. Jika θ berada di kuadran 3, nilai tan θ positif.
2. Fungsi logaritma adalah invers dari fungsi eksponen, yaitu jika $y = {}^a\log x$, maka $a^y = x$. Demikian juga sebaliknya, jika $a^y = x$, maka $y = {}^a\log x$.

3. Misalkan $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ adalah fungsi rasional dengan dengan derajat $P(x)$ sama dengan $Q(x)$, maka asimtot horizontal grafik f melalui rasio pangkat tertinggi.
4. Pertumbuhan yang bertambah sebanyak dua satuan untuk setiap satuan waktu merupakan pertumbuhan secara eksponensial.

Isian Singkat. Lengkapilah pernyataan nomor 5–8 berikut dengan isian yang paling tepat.

5. Grafik $y=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ memiliki amplitudo . . . dan periode . . . .
6. Fungsi $f(x)=\log x^2$ memiliki daerah asal . . . dan daerah hasil . . . .
7. Diketahui fungsi $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ dengan n adalah bilangan bulat genap lebih dari 1. Maka, daerah asal fungsi f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$ yang menyebabkan . . . .
8. Berikan contoh fungsi *piecewise.*
9. Gunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk menentukan nilai cos θ, jika tan $\theta = -4$ dan $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$.
10. Tentukan daerah asal dari fungsi $f(x)=\sqrt{x^2-4}$
11. Gambarkan fungsi nilai mutlak $h=|2x-3|$ dalam bidang Kartesius.

Penerapan

12. **Kincir Ria.** Sebuah kincir ria memiliki diameter 30 m dan memerlukan waktu 12 menit untuk menempuh satu putaran penuh. Kincir ria tersebut berputar berlawanan arah jarum jam. Jika seseorang mula-mula berada di puncak kincir ria tersebut, carilah fungsi $y = a \cos bx$ yang memodelkan ketinggian orang tersebut relatif terhadap pusat kincir ria setiap menitnya.
13. **Suhu Kopi.** Segelas kopi yang suhunya 100℃ diletakkan pada sebuah ruangan yang suhunya 25℃. Waktu t (dalam menit) yang diperlukan agar suhu kopi tersebut menjadi T℃ dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$t=20\log\left(\frac{75}{T-25}\right)$$

Berapa lama waktu yang diperlukan agar suhu kopi tersebut menjadi 60°C?

14. **Perjalanan.** Nyoman pergi ke pantai sejauh 50 km. Dia menempuh setengah perjalanan dengan kecepatan tertentu (dalam km/jam). Setengah perjalanan selanjutnya Nyoman melakukan perjalanan dengan kecepatan 15 km/jam lebih lambat. Jika x mewakili kecepatan dalam km/jam dan fingsi w menyatakan waktu perjalanan, tentukan:
    a). model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman untuk menempuh perjalanan pertama;
    b). model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman untuk menyelesaikan setengah perjalanan selanjutnya.
15. Aang adalah pelari 100 m. Dia mengikuti lomba dalam rangka peringatan Hari Kemerdekaan Republik Indonesia. Dia berlari pada sebuah lintasan 100 m di desanya. Untuk keperluan dokumentasi, seorang fotografer berdiri di samping tepat tengah lintasan.
    a). Buatlah tabel yang menjelaskan jarak Aang relatif terhadap awal lintasan dan jarak dia terhadap sang fotografer!
    b). Gambarkan grafik yang menyatakan jarak Aang terhadap sang fotografer dalam jarak Aang terhadap lintasan!
    c). Tuliskan fungsi yang menyatakan jarak Aang terhadap sang fotografer dalam jarak Aang terhadap lintasan!

Penalaran

16. Aldo ingin membuktikan identitas trigonometri $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Ketika melakukannya, dia memilih beberapa sudut θ, yaitu 30°, 45°, dan 60°. Setelah itu, dia menuliskan hasil perhitungannya ke dalam tabel berikut.

θ	$\tan\theta$	$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
30°	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	1	$\dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$
60°	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

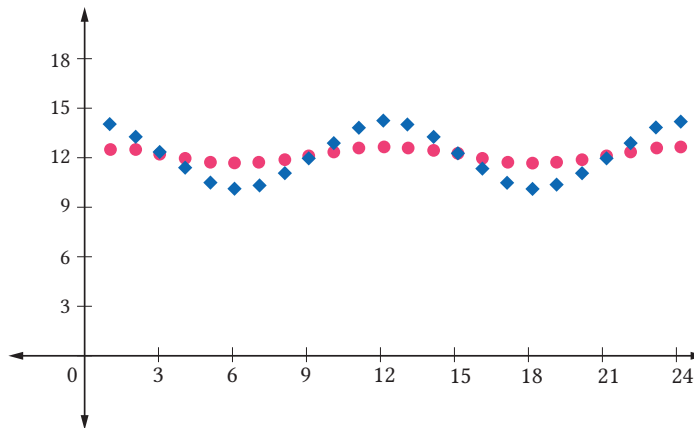
Karena setiap baris pada kolom kedua sama dengan kolom ketiga, maka $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Dengan demikian, Aldo menganggap dia telah membuktikan identitas trigonometri tersebut.

Apakah kalian setuju dengan strategi pembuktian yang digunakan oleh Aldo? Jelaskan alasannya.

17. Jika $a \geq b > 1$, tentukan nilai terbesar yang mungkin untuk ${}^{a}\log\frac{a}{b} + {}^{b}\log\frac{b}{a}$.
18. Diketahui grafik fungsi $f(x) = \frac{(x+2)^k(x^2-1)}{(x^2+x-2)(x^2+3x+2)}$ untuk bilangan asli k. Tentukan nilai k agar fungsi f mempunyai satu asimtot vertikal.
19. Buktikan teorema berikut:
    Sebuah fungsi eksponensial $f(x) = a^x$ merupakan fungsi yang naik jika $a > 1$, merupakan fungsi konstan jika $a = 1$, dan merupakan fungsi turun jika $a < 1$.

Variasi Lamanya Hari Denpasar dan Perth

Apakah kalian pernah menyadari bahwa lamanya suatu hari (dari terbit sampai terbenamnya matahari) berbeda dengan hari-hari lainnya? Mungkin kalian ada yang pernah menyadari dan ada yang tidak karena memang hal tersebut dipengaruhi oleh tempat tinggal kalian masing-masing. Untuk mengilustrasikannya, kita akan menggunakan Kota Denpasar, Bali dan Kota Perth, Australia Barat. Jika kalian lihat di globe atau peta, Kota Perth ini letaknya jauh di selatan Kota Denpasar.

1. Grafik berikut ini menunjukkan rata-rata lamanya hari (dalam jam) Kota Denpasar dan Kota Perth pada tahun 2020 dan 2021 setiap bulannya. (Data yang digunakan untuk menggambar grafik tersebut diperoleh dari www.timeanddate.com.)

Gambar 5.38. Grafik Rata-rata Lama Hari Setiap Bulan

Berdasarkan grafik tersebut, menurut kalian, manakah yang merepresentasikan lama hari di Kota Denpasar dan Kota Perth? Jelaskan alasannya.

2. Carilah fungsi $y = a\cos(bx) + c$ yang dapat memodelkan lama hari di Kota Denpasar dan Kota Perth, kemudian sketsalah grafiknya.
3. Kota Karratha, Australia Barat letaknya di antara Kota Denpasar dan Kota Perth. Hanya berdasarkan informasi ini, sketsalah perkiraan grafik lamanya hari di kota tersebut pada tahun 2020 – 2021.

Di Bab 5, kalian telah belajar berbagai macam fungsi dan menggunakan fungsi tersebut untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Sekarang, refleksikan pengalaman belajar kalian di bab ini dengan menanggapi pertanyaan atau pernyataan panduan berikut.

1. Sejauh mana manfaat yang dapat kalian rasakan setelah berdinamika di Bab 5 Fungsi dan Pemodelannya? Ceritakan manfaat yang dapat kalian rasakan.
2. Strategi-strategi belajar seperti apa yang kalian gunakan untuk belajar di Bab 5 Fungsi dan Pemodelannya? Apakah semua strateginya sudah membantu kalian untuk belajar secara optimal?
3. Sekarang, nilailah pembelajaran kalian sendiri di Bab 5 Fungsi dan Pemodelannya ini dengan mencentang kolom-kolom yang sesuai pada tabel berikut.

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
Subbab A Fungsi Trigonometri				
1.	Saya dapat menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sebarang sudut.			
2.	Saya dapat menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri.			
3.	Saya dapat menentukan amplitudo dan periode fungsi-fungsi trigonometri dan menggunakannya untuk mensketsa grafik fungsi-fungsi trigonometri tersebut.			
4.	Saya dapat memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi trigonometri.			
Subbab B Fungsi Logaritma				
5.	Saya dapat menentukan nilai fungsi-fungsi logaritma.			
6.	Saya dapat menggunakan identitas-identitas logaritma dasar untuk menentukan nilai fungsi-fungsi logaritma.			
7.	Saya dapat mensketsa grafik fungsi-fungsi logaritma dan menganalisis sifat-sifat fungsi logaritma berdasarkan grafik fungsi tersebut			
8.	Saya dapat memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi trigonometri.			
Subbab C Fungsi Aljabar				
9.	Saya dapat menetukan daerah asal dan daerah hasil fungsi rasional.			
10.	Saya dapat menentukan asimtot fungsi rasional.			
11.	Saya dapat menggambar grafik fungsi rasional.			

No.	TARGET PEMBELAJARAN	☺	😐	☹
12.	Saya dapat memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi rasional.			
13.	Saya dapat menetukan daerah asal dan daerah hasil fungsi akar.			
14.	Saya dapat menggambar grafik fungsi akar.			
15.	Saya dapat memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi rasional.			
Subbab D Fungsi Nonaljabar				
16.	Saya dapat menetukan daerah asal dan daerah hasil fungsi eksponensial.			
17.	Saya dapat mensketsa grafik fungsi-fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, dan fungsi *piecewise* dan menganalisa sifat-sifat fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, dan fungsi *piecewise*.			
18.	Saya dapat memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari dengan menggunakan fungsi eksponensial, fungsi nilai mutlak, dan fungsi *piecewise*.			

Pengayaan

- Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. (2017). *Aljabar dan Trigonometri*. Sanata Dharma University Press. Buku ini membahas topik-topik trigonometri. Secara khusus, di buku ini kalian dapat mempelajari fungsi trigonometri, penerapannya pada segitiga, identitas-identitas trigonometri, dan persamaan trigonometri.
- Kristanto, Y. D. (2016). *Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA* Kelas X. Jakarta: Grasindo.

- Buku ini membahas fungsi rasional, di buku ini kalian dapat mempelajari penerapan fungsi rasional pada kehidupan sehari-hari.
- https://youtube.com/playlist?list=PLlXuAh5HFy3fp3Un-ieQn0aGZH8NWzkY-. Channel youtube menjelaskan tentang materi fungsi rasional.

Glosarium

algoritma pembagian polynomial suatu algoritma yang menyatakan bahwa jika $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial, dengan $Q(x) \neq 0$, maka ada polinomial-polinomial $H(x)$ dan $S(x)$ yang masing-masing tunggal, dengan $S(x)$ adalah 0 atau polinomial berderajat kurang dari $Q(x)$, sedemikian sehingga $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + S(x)$

amplitudo jarak maksimum nilai fungsi periodik terhadap garis tengahnya

argumen jika bilangan kompleks dinyatakan dalam bentuk polar $z = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$ maka argumen z adalah $\theta = Arg(z) + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

asimtot suatu garis lurus yang didekati oleh kurva lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di jauh tak terhingga. Asimtot juga bisa diartikan dengan sebuah garis lurus yang sangat dekat dengan kurva lengkung di titik jauh tak terhingga

asimtot horizontal jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $y = b$ sehingga nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, maka garis $y = b$ disebut asimtot horizontal

asimtot miring jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $y = mx + b$ sehingga nilai x mendekati positif tak hingga atau x mendekati negatif tak hingga, maka garis $y = mx + b$ disebut sebagai asimtot miring

asimtot vertikal jika grafik fungsi f akan terus mendekat ke garis $x = a$ sehingga nilai y mendekati positif tak hingga atau y mendekati negatif tak hingga, maka garis $x = a$ disebut sebagai asimtot vertikal

bilangan kompleks suatu bilangan yang terdiri atas bagian real dan bagian imajiner

bilangan real bilangan yang terdiri atas bilangan rasional atau irasional

derajat jika a adalah koefisien yang tak nol, derajat monomial ax^n adalah n. Derajat suatu monomial yang terdiri atas beberapa variabel adalah jumlah dari eksponen semua variabel tersebut. Derajat suatu polinomial adalah derajat dari sukunya yang berderajat tertinggi

determinan matriks berordo 2×2. Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A dapat dinyatakan $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

dilatasi transformasi yang mengubah jarak suatu titik terhadap suatu titik tertentu dengan faktor pengali tertentu

elemen matriks bilangan-bilangan penyusun suatu matriks

eksponen bilangan b yang menyatakan pangkat pada bentuk a^b

fungsi pemetaan setiap anggota suatu himpunan (dinamakan daerah asal) kepada tepat satu anggota himpunan yang lain (dinamakan daerah kawan)

fungsi akar jika $g(x)$ adalah suatu fungsi dan n adalah bilangan bulat lebih dari 1, maka $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ merupakan fungsi akar

fungsi eksponensial untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$, fungsi eksponensial didefinisikan sebagai fungsi yang memenuhi bentuk $f(x) = ab^x$, yang mana $a \neq 0$, $b > 0$, dan $b \neq 1$

fungsi nilai mutlak fungsi yang dinotasikan dengan $f(x) = |x|$

fungsi *piecewise* fungsi yang didefinisikan dengan beberapa formula pada beberapa daerah asal

fungsi polinomial fungsi polinomial dalam variabel x adalah fungsi yang memiliki bentuk umum $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ dengan koefisien-koefisiennya, yaitu a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, dan a_0, adalah bilangan-bilangan real, $a_n \neq 0$, dan n adalah bilangan cacah

fungsi rasional jika $p(x)$ dan $q(x)$ adalah fungsi polinomial dan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dengan $q(x) \neq 0$, maka $f(x)$ merupakan fungsi rasional

fungsi tangga fungsi yang bernilai konstan pada interval-interval yang mendefinisikan fungsi tersebut

garis tengah garis horizontal yang letaknya di tengah-tengah nilai maksimum dan minimum fungsi periodik

geometri cabang matematika yang menerangkan sifat-sifat garis, sudut, bidang, dan ruang

grafik grafik suatu persamaan dalam x dan y merupakan himpunan semua titik (x, y) pada bidang koordinat yang memenuhi persamaan tersebut

identitas polinomial persamaan polinomial yang selalu benar untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya

identitas trigonometri persamaan trigonometri yang selalu benar untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya

invers matriks jika A adalah sebuah matriks berordo $n \times n$ dan I adalah matriks identitas berordo $n \times n$, maka invers matriks A, dinotasikan dengan A^{-1}, adalah matriks yang memenuhi sifat $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

kesamaan dua matriks matriks A dan B dikatakan sama, dinotasikan dengan $A = B$, jika dan hanya jika matriks A dan matriks B mempunyai ordo yang sama serta semua elemen-elemen yang seletak pada matriks A dan B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j)

koefisien utama koefisien dari suku utama polinomial

koefisien faktor numerik dari suatu monomial

konjugat bentuk sekawan dari bilangan kompleks $z = x + iy$ yang dinyatakan dalam bentuk $\overline{z} = x - iy$

konstanta monomial yang tidak memuat variabel

komposisi transformasi transformasi majemuk yang memuat lebih dari satu transformasi

logaritma komponen pangkat yang diperlukan untuk memangkatkan bilangan dasar supaya mendapatkan bilangan tertentu (jika bilangan dasarnya 10, maka log 100 = 2, artinya 10 pangkat 2 = 100)

matriks susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom. Kelompok bilangan tersebut di dalam kurung biasa "( )", kurung siku "[ ]", atau "‖ ‖"

matriks baris matriks yang berordo $1 \times n$. Matriks baris terdiri atas satu baris dan memuat n elemen

matriks datar matriks yang berordo $m \times n$ dengan nilai $m < n$ yang berarti banyak kolom lebih banyak daripada banyak baris

matriks diagonal matriks persegi yang elemen-elemennya bernilai nol terkecuali elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama

matriks identitas matriks diagonal dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai satu

matriks kolom matriks yang berordo $m \times 1$. Matriks kolom terdiri atas satu kolom dan memuat m elemen

matriks nol matriks yang semua elemen-elemennya bernilai nol

matriks persegi matriks yang berordo $m \times n$ dengan nilai $m = n$

matriks segitiga matriks persegi yang semua elemen-elemennya yang berada di bawah atau di atas diagonal utama bernilai nol

matriks simetris matriks persegi dengan elemen-elemen yang letaknya simetris terhadap diagonal utama bernilai sama, elemen a_{ij} sama dengan elemen a_{ji} dengan $i \neq j$

matriks tegak matriks yang berordo $m \times n$ dengan nilai $m > n$ yang berarti banyak baris lebih banyak dari pada banyak kolom

matriks transpos matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen pada baris suatu matriks menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris

metode Horner salah satu cara untuk melakukan pembagian polinomial dan merupakan bentuk penyederhanaan dari pembagian bersusun

minor dan kofaktor matriks jika A adalah sebuah matriks persegi, maka minor elemen a_{ij} dinotasikan m_{ij} dan di definisikan sebagai determinan dari matriks yang diperoleh setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari matriks A. Kofaktor elemen baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan $k_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

modulus nilai dari $\sqrt{x^2 + y^2}$ untuk bilangan kompleks $z = x + iy$

monomial suatu bilangan, suatu variabel berpangkat bilangan cacah, atau perkalian antara bilangan dan satu atau lebih variabel-variabel berpangkat bilangan cacah

ordo matriks ukuran dari suatu matriks yang ditentukan oleh banyak baris dan banyak kolom pada matriks itu

pengurangan matriks jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$, pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks B

penjumlahan matriks penjumlahan dua matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan elemen-elemen matriks A dan B yang seletak

perilaku ujung perilaku dari suatu grafik ketika x mendekati tak hingga atau negatif tak hingga

perkalian matriks jika matriks A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times p$, ada matriks C yang merupakan hasil perkalian matriks A dengan matriks B atau $C=AB$. Matriks C berordo $m \times p$ dan elemen-elemen c_{ij} dihitung dengan cara mengalikan elemen baris ke-i pada matriks A terhadap elemen kolom ke-j pada matriks B, kemudian ditambahkan hasilnya

perkalian matriks dengan skalar jika matriks A matriks yang berordo $m \times n$ dan k adalah bilangan real (k sering disebut skalar), maka kA menyatakan matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen pada matriks A dengan k

polinomial bentuk aljabar yang berupa monomial atau penjumlahan dari dua atau lebih monomial

posisi baku suatu sudut dikatakan dalam posisi baku jika sudut tersebut memiliki sisi awal sumbu X positif dan pusat putarannya di titik asal (0, 0)

refleksi transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin

rotasi transformasi yang memindahkan suatu titik dengan cara memutar titik tersebut sejauh α derajat terhadap suatu titik tertentu

sudut negatif sudut yang putarannya searah dengan putaran jarum jam

sudut positif sudut yang putarannya berlawanan arah dengan putaran jarum jam

sudut di dalam trigonometri, sudut dapat dipandang sebagai perputaran sinar garis dari sisi awal menuju sisi akhir

suku utama suku dari fungsi polinomial yang memiliki derajat tertinggi

teorema factor suatu teorema yang menyatakan bahwa $x-c$ merupakan faktor dari polinomial $P(x)$ jika dan hanya jika $P(c) = 0$

teorema sisa suatu teorema yang menyatakan bahwa jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $x-c$, sisanya sama dengan $P(c)$

transformasi geometri perubahan posisi atau ukuran dari suatu objek geometri (titik, garis, kurva, dan himpunan titik-titik klain) pada bidang

translasi transformasi yang memindahkan suatu titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu

Daftar Pustaka

Abramson, J. 2001. *Algebra and Trigonometry*. Texas: Rice University.

Abubakar, A. S., & Kaisupy, R. A. 2018. *Peran Kriptografi dalam Aplikasi WhatsApp*. Yogyakarta: Universitas Amikom Yogyakarta.

Andreescu, T.,, & Andrica, D. 2006. *Complex Numbers from A to..z*. United States of America: Birkhäuser USA.

Anton, H., & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra* (11^{th} ed.). Canada: Anton Textbooks, Inc.

Aufmann, R. N., Barker, V. C., & Nation, R. D. 2011. *College Algebra and Trigonometry* (7^{th} ed.). USA: Brooks/Cole Publishing Company.

Dedy, E., & Sumiaty, E. 2020. *Fungsi Variabel Kompleks*. Jakarta: Bumi Aksara

Duamairy. 2012. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.

Eric Balzarini et al. 2012. *Pre-Calculus 12*. McGraw-Hill Ryerson

Goode, S.W. 2000. *Differential Equations and Linear Algebra* (2^{nd} ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc

Holliday, Luchin, Cuevas, Carter, Marks, Day, Casey, & Hayek. 2008. *Algebra 2*. New York: Glencoe/McGraw-Hill.

Istiqomah. 2020. *Modul Matematika Peminatan Kelas XI KD 3.4*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2019. *Buku Siswa Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2019. *Buku Guru Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2020. *Buku Siswa Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2020. *Buku Guru Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Kristanto, Y. D. 2016. *Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA Kelas X*. Jakarta: Grasindo.

Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. 2017. *Aljabar dan Trigonometri*. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

Larson, R., & Falvo, D.C. 2009. *Elementary Linear Algebra* (6th ed.). USA: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Martin-Gay, E. 2013. *Intermediate Algebra* (6th ed.). Boston: Pearson.

McAskill, B., Watt, W., Balzarini, E., Johnson, B., Zarski, C. 2012. *Pre-Calculus 12*. Canada: McGraw-Hill Ryerson Ltd.

Morrison, K., & Hamshaw, N. 2015. *Cambridge IGCSE Mathematics Core and Extended Coursebook with CD-ROM*. Cambridge University Press.

Purcell, E.J, dkk. 2007. *Calculus: 9th Edition*. Prentice Hall, Inc.

Rawuh. 1992. *Geometri Transformasi*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Smith, M.S., & Stein, M.K. 2018 . 5 *Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions* (2nd ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stewart, James. 2012. *Calculus Early Transcendentals: 7th Edition*. United States of America: Brooks/Cole, USA,

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. 2020 . Calculus: early transcendentals, ninth edition. Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. 2016. *Algebra and Trigonometry* (4th ed.). Boston: Cengage Learning.

Sukino. 2017. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib*. Jakarta: Erlangga.

Thomas, G.B. 2010. *Calculus Early Transcendentals: 12th Edition.* New York: Addison-Wesley.

Sumber Laman

https://interaktif.kompas.id/baca/gizi-seimbang/."Gizi Seimbang dan Atlet." *Kompas*. Diakses pada 2 Juli 2021

https://www.citizenmath.com/lessons/going-once-going-twice Citizen Math. "Going Once, Going Twice: How much should you bid in an auction?" Diakses pada 11 Agustus 2021

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/56d8aee5637a85a2078c257d?collections=featured-collections,5e73b36a5141777627553357."Burning Daylight." Diakses pada 13 Agustus 2021

https://www.kompas.tv/amp/article/133356/videos/hari-ini-tsunami-aceh-pernah-terjadi-2004-silam-ini-fakta-dahsyatnya-bencana?page=2. Hariyanto dan Kurniawan. "Hari ini Tsunami Aceh Pernah Terjadi 2004 Silam, ini Fakta Dahsyatnya Bencana." Kompas TV. Diakses pada 19 Agustus 2021.

https://4.bp.blogspot.com/9udFJt5C3Ic/VWnJomVsjTI/AAAAAAAABKU/7etkVBbniYY/s1600/pengertian%2Bdan%2Bsejarah%2Bkriptografi.jpg. Diakses pada 29 Juni 2021.

https://corona.jogjaprov.go.id/. Diakses pada 2 Juli 2021

https://eatjoy.co.id/kandungan-gizi-daging-ayam-ras/. Diakses pada 5 Juli 2021

https://pixabay.com/id/photos/matriks-biner-keamanan-kode-2503236/. Diakses pada 5 Agustus 2021.

https://sumberbelajar.belajar.kemdikbud.go.id/sumberbelajar/tampil/Operasi-Matriks-2014/konten2.html

https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/2/index.html Illustrative Mathematics. *Polynomial and Rational Functions*. Diakses pada 15 Juli 2021

https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/6/index.html “Illustrative Mathematics. Trigonometric Functions.” Diakses pada 5 Juli 2021

https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-3/index.html Open Up Resources. “Polynomial Functions.” Diakses pada 15 September 2021

https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-7/index.html Open Up Resources. “Trigonometric Functions, Equations, and Identities”. Diakses pada 17 September 2021

https://bobo.grid.id/read/082135113/apakah-filosofi-batik-di-luar-pulau-jawa-sama-dengan-batik-yang-berasal-dari-jawa-yuk-cari-tahu?page=all. Rahmalia, I. *“Apakah Filosofi Batik di Luar Pulau Jawa Sama dengan Batik yang Berasal dari Jawa?”* Diakses pada 5 Juli 2021

https://en.wikipedia.org/wiki/Password_strength. “Password strength.” Diakses pada 13 Agustus 2021

https://eol.jsc.nasa.gov/SearchPhotos/photo.pl?mission=ISS064&roll=E&frame=48480, Diakses pada 21 Oktober 2021.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Borobudur-Temple-Park_Indonesia_Stupas-of-Borobudur-04.jpg, Diakses pada 21 Oktober 2021.

Indeks

H

I

K

L

M

N

O

P

Profil Penulis

Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
Email : alazhari.masta@upi.edu
Alamat Kantor : FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No.229, Kota Bandung, Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Dosen Program Studi S1 Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015 – sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S3: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2013 – 2018)
2. S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2011 – 2013)
3. S1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia (2007 – 2011)

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku digital pusat perbukuan untuk Program kelas IV, V, VI (2019)
2. Buku Siswa Matematika SMA/MA/SMK kelas X. Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2020
3. Buku Guru Matematika SMA/MA/SMK kelas X. Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2020

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Math Project (Pembelajaran Matematika Berbasis Pendekatan Saintifik) untuk kelas I SD, IV SD, VII SMP. Penerbit Yrama Widya Bandung pada tahun 2014.
2. Buku Siswa Matematika Peminatan SMA/MA/SMK kelas X. Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2019
3. Buku Guru Matematika SMA/MA/SMK kelas X. Penerbit: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud. tahun 2019

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Hasil Penelitian selengkapnya dapat dengan id berikut.

Id Scopus	57189662322
Id Google Scholar	5cxkPMUAAAAJ

Profil Penulis

Nama Lengkap : Yosep Dwi Kristanto, M.Pd.
Email : yosepdwikristanto@usd.ac.id
Instansi : Universitas Sanata Dharma
Alamat Instansi : Jl. Affandi, Mrican, Caturtunggal, Depok, Sleman, DIY
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta (2016 – sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S2: Program Pascasarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2013 – 2015)
2. S1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Malang (2008 – 2012)

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Metode Statistik: Jilid 1 (2021)
2. Metode Statistik: Jilid 2 (2021)
3. Super Modul Matematika SMP/MTs Kelas VII, VIII, IX (2018)
4. Aljabar dan Trigonometri (2017)
5. Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA Kelas X (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Towards a mathematics textbook for supporting 21st century learning: The student perspective (2020)
2. Using network analysis for rapid, transparent, and rigorous thematic analysis: A case study of online distance learning (2020)
3. Listening to the student voice on emergency remote teaching during the pandemic crisis (2020)
4. Development and validation of a test instrument to measure pre-service mathematics teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge
5. Technology-enhanced pre-instructional peer assessment: Exploring students' perceptions in a Statistical Methods course (2018)

Portofolio selengkapnya dapat dilihat di laman http://people.usd.ac.id/~ydkristanto/.

Profil Penulis

Nama Lengkap : Elyda Yulfiana, S.Pd.
Email : elydayulfiana@gmail.com
Instansi : SMA Negeri 7 Yogyakarta
Alamat Instansi : Jl. MT. Haryono No.47, Suryodiningratan, Kec. Mantrijeron, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta
Bidang Keahlian : Guru Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Guru matematika di SMP Negeri 2 Jetis Bantul (2016)
2. Guru matematika di SMA Negeri 7 Yogyakarta (2018 – sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. Pendidikan Profesi Guru/ Universitas Sanata Dharma Yogyakarta (2018)
2. S1: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan/ Pendidikan Matematika/ Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa Yogyakarta (2012 - 2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Yulfiana, E. (2018). Jalan Menuju Guru yang Mencintai Anak Didik dan Murah Hati. In Eko Budi Santoso (Ed.), Jalan Menuju Guru Matematika yang Mencintai Anak Didik dan Profesinya (pp. 77-86). Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

Profil Penulis

Nama Lengkap : Muhammad Taqiyuddin
Email : taqimathed@gmail.com
Instansi : -
Alamat Instansi : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Asisten Dosen, 2020-2021
2. Guru Matematika Sekolah Menengah, 2016-2019

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S3, 2021-Sekarang, Pendidikan Matematika, University of Auckland, Selandia Baru
2. S2, 2019-2021, Pendidikan Matematika, University of Georgia, Amerika Serikat
3. S1, 2012-2016, Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Pre-service teachers' operative and figurative actions: The case of one-variable inequality (2021)
2. Analisis buku matematika kurikulum 1975 dan kurikulum 2013 (2020)
3. A Note on Inclusion Properties of Weighted Orlicz Spaces (2020)
4. Analisis Buku Matematika Sekolah Menengah Atas Pada Topik Turunan (2019)
5. Telaah buku matematika Indonesia pada topik pertidaksamaan matematika (2018)
6. Inclusion properties of Orlicz spaces and weak Orlicz spaces generated by concave functions (2018)
7. Analysis of junior high school students' attempt to solve a linear inequality problem (2017)
8. Miskonsepsi siswa sekolah menengah pertama pada topik pertidaksamaan linear satu variabel (2017)

Hasil penelitian selengkapnya dapat dilihat di [Google Scholar ID: 6drbwHQAAAAJ]

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd
Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Akun Facebook : –
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember, Jl. Kalimantan nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi

1. Dosen Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (1983 – sekarang)
2. Dosen Penguji Disertasi S3 Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas Negeri Surabaya (2016 – sekarang)
3. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007 –2016)
4. Ketua Tim Pengembangan Kurikulum Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (2006)
5. Guru Matematika di SMA (1981 – 1985)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya tahun 1999
2. S2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1992
3. S1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika Untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X (2019)
2. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas X (2021)
3. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII (2018) (Editor)
4. Matematika Fisika 1 (2018)
5. Matematika Fisika 2 (2018)
6. Strategi Belajar Mengajar IPA (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi dan Fungsi (2018)
2. Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang (2014)
3. Strategi Belajar Mengajar Matematika (2012)
4. Model of Teaching and Learning (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193683524.

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Dr. Kiki Ariyanti Sugeng

Email : kiki@sci.ui.ac.id

Instansi : Universitas Indonesia

Alamat Instansi : Kampus UI Depok, 16424

Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Dosen UI, 1986- sekarang

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S1 Matematika UI, 1985
2. S2 Matematika ITB, 1987
3. S3 Matematika, Federation University (a/n Univ. of Ballarat), Australia, 2006

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Teori Graf dan Aplikasinya, 2014

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. Sugeng, K.A., Silaban, D.R., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Local inclusive distance vertex irregular graphs, Mathematics, 9 (14) (2021), 1673
2. Lu, J., Peng, J., Chen, J., Sugeng, K.A., Prediction method of autoregressive moving average models for uncertain time series , International Journal of General Systems , 49(5) (2020), pp. 546–572
3. Septiyanto, F. Sugeng, K.A., Rainbow connection number of generalized composition, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 17(1)(2020), pp. 367–372
4. Utami, B., Sugeng, K.A., Utama, S., On inclusive d-distance irregularity strength on triangular ladder graph and path, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics , 17(3)(2020), pp. 810–819
5. Judul lain dapat dilihat di:
   https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=12797262400
   https://scholar.ui.ac.id/en/persons/kiki-ariyanti

Profil Ilustrator

Nama Lengkap : Yol Yulianto

Email : yolyulianto@gmail.com

IG : https://www.instagram.com/yolyulianto/

Alamat Instansi : Taman Rembrandt Blok R.04 No.88 Citra Raya Tangerang

Bidang Keahlian : Ilustrasi

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Ilustrator Majalah Anak Ina, tahun 1998-2000
2. Ilustrator Majalah Ori-Kompas Gramedia, tahun 2001-2010
3. Ilustrator Majalah Superkids Junior, tahun 2011-2014
4. Ilustrator Freelance, tahun 2015-sekarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. SD Negeri Panggung 1 Semarang tahun belajar 1979-1985
2. SMP Negeri 3 Semarang tahun belajar 1985-1988
3. SMA Negeri 1 Semarang tahun belajar 1988-1991
4. FT Arsitektur Undip Semarang tahun belajar 1991-1996

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Rumah Ajaib, Penerbit Elaxmedia Komputindo, tahun 2009
2. Karnaval Loli, Penerbit Elaxmedia Komputindo, tahun 2009
3. Seri Buku Stiker Kolase, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2010
4. Cerita Rakyat Nusantara. Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2012
5. Siri Cerita Berirama, Penerbit PTS Malaysia, tahun 2016
6. Seri Komilag , Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2016-2017
7. Seri Aku Anak Cerdas, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2018
8. Seri 60 Aktivitas Anak, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2019
9. Seri Tangguh Bencana, Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2019

Penghargaan:

1. Juara Pertama Lomba Komik Departemen Agama tahun 2004
2. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Pidie Jaya tahun 2017
3. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Mamasa tahun 2017
4. Lima karya terbaik Lomba Maskot Germas tahun 2018
5. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Bitung tahun 2019
6. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Manado tahun 2019

Profil Penyunting

Nama Lengkap : Seni Asiati, M.Pd
Email : seniasiatibasin@gmail.com
Alamat Kantor : Jalan Gereja Tugu Semper Jakarta Utara
Bidang Keahlian : Penulis dan editor

Buku yang Pernah Ditelaah, Direviu, Dibuat Ilustrasi, dan/atau Dinilai (10 Tahun Terakhir):

1. Editor Buku Teks Pelajaran Seni Budaya Kelas VII, VIII Puskurbuk Kemendikbud (2013 dan 2017)
2. Editor Buku Teks Pelajaran Prakarya Kelas VII Puskurbuk Kemendikbud (2013)
3. Editor Buku Teks Pelajaran PJOK Kelas VII dan VIII Puskurbuk Kemendikbud (2013 dan 2017)
4. Editor Buku Tematik SD Kelas II dan Kelas V Puskurbuk Kemendikbud (2015)
5. Editor Buku Teks Psikologi Lansia Kelas X Puskurbuk kemendikbud (2019)
6. Editor Buku Guru Seni Musik Kelas IV dan kelas VII (2020)

Profil Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : Dono Merdiko
Email : donoem.2019@gmail.com
Instansi : Independen
Alamat Instansi : Jl. Akmaliah No. 24, 13730
Bidang Keahlian : Desainer Buku

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Penata Letak Mizan Group. 2013-2021
2. Penata Letak Penerbit Kasyaf. 2005-2021
3. Penata Letak BTP Tematik Pusat Kurikulum dan Perbukuan. 2014-2019

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. Bina Sarana Informatika, Manajemen Informatika, 2002

Buku yang Pernah dibuat Ilustrasi/desain (10 tahun terakhir)

1. Buku Seri Tematik, Pusat Kurikulum dan Perbukuan 2014-2019
2. Buku Agama Mizan Group. 2013-2021
3. Buku Agama Penerbit Kasyaf. 2005-2021